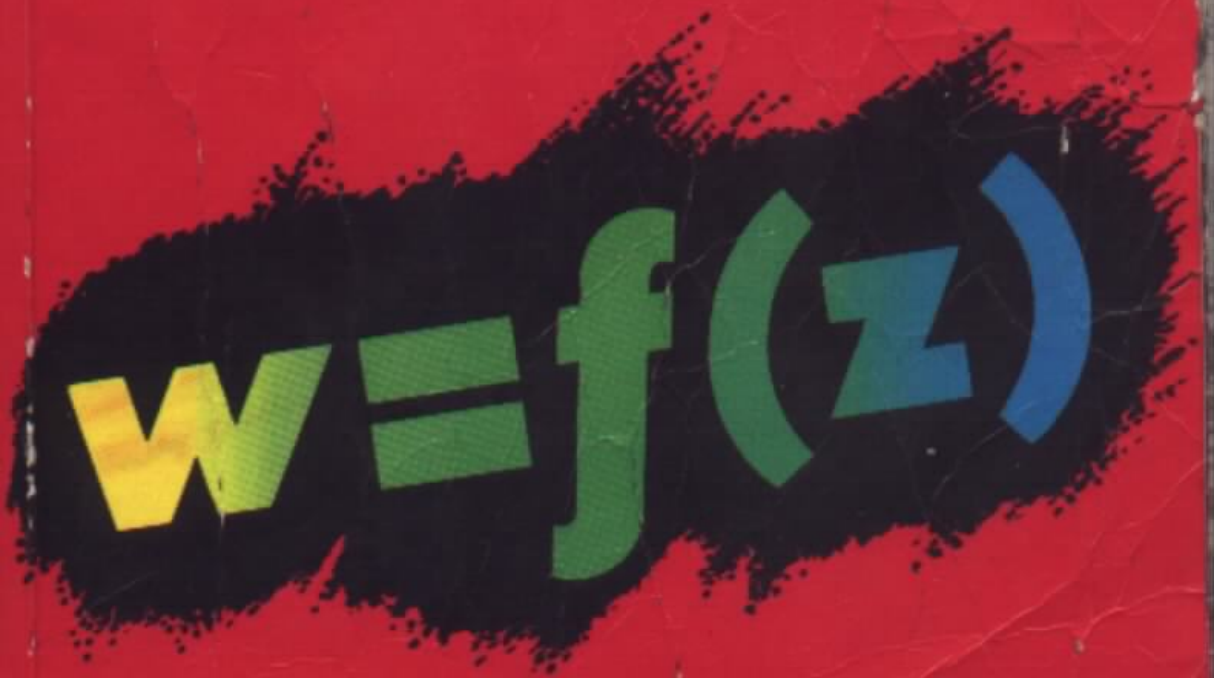
VARIABLE COMPLEJA Y APLICACIONES

QUINTA EDICION

Ruel V. Churchill / James Ward Brown



517.53
C 563

VARIABLE COMPLEJA Y APLICACIONES

517.53
563
Base 1144
E8
124055
9

VARIABLE COMPLEJA Y APLICACIONES

Quinta edición

Ruel V. Churchill
Profesor Emérito de Matemáticas
Universidad de Michigan

James Ward Brown
Profesor de Matemáticas
Universidad de Michigan-Dearborn

Traducción:

LORENZO ABELLANAS RAPUN
Catedrático de Métodos Matemáticos de la Física
Facultad de Ciencias Físicas
Universidad Complutense de Madrid

McGraw-Hill
MADRID • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA • MEXICO • NUEVA YORK
PANAMA • SAN JUAN • SANTAFE DE BOGOTA • SANTIAGO • SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILAN • MONTREAL • NUEVA DELHI
PARIS • SAN FRANCISCO • SIDNEY • SINGAPUR • ST. LOUIS • TOKIO • TORONTO

A la memoria de mi padre,
GEORGE H. BROWN,
y de mi amigo y coautor,
RUEL V. CHURCHILL.
Estos distinguidos hombres de ciencia influyeron durante años
en las carreras de muchos, entre quienes me incluyo.

J. W. B.

VARIABLE COMPLEJA Y APLICACIONES. Quinta edición

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

DERECHOS RESERVADOS © 1992, respecto a la segunda edición en español, por McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE ESPAÑA, S. A.
Edificio Valrealty, 1.ª planta
Basauri, 17
28023 Aravaca (Madrid)

Traducido de la quinta edición en inglés de
COMPLEX VARIABLES AND APPLICATIONS

Copyright © MCMXC, por McGraw-Hill, Inc.

ISBN: 0-07-010905-2

ISBN: 84-7615-730-4
Depósito legal: M. 45.645-1996

Compuesto en: MonoComp, S. A.
Impreso en: EDIGRAFOS, S. A.

PRINTED IN SPAIN - IMPRESO EN ESPAÑA

9 11

CONTENIDO

Sobre los autores xi

Prefacio xiii

Capítulo 1 Número complejos 1

1. Definición. 2. Propiedades algebraicas. 3. Interpretación geométrica. 4. Desigualdad triangular. 5. Forma polar. 6. Forma exponencial. 7. Potencias y raíces. 8. Regiones en el plano complejo.

Capítulo 2 Funciones analíticas 30

9. Funciones de una variable compleja. 10. Aplicaciones. 11. Límites. 12. Teoremas sobre límites. 13. Límites y el punto del infinito. 14. Continuidad. 15. Derivadas. 16. Fórmulas de derivación. 17. Ecuaciones de Cauchy-Riemann. 18. Condiciones suficientes. 19. Coordenadas polares. 20. Funciones analíticas. 21. Funciones armónicas.

Capítulo 3 Funciones elementales 72

22. La función exponencial. 23. Otras propiedades de exp z. 24. Funciones trigonométricas. 25. Funciones hiperbólicas. 26. La función logaritmo y sus ramas. 27. Otras propiedades de los logaritmos. 28. Exponentes complejos. 29. Funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas.

Capítulo 4 Integrales 97

30. Funciones complejas $w(t)$. 31. Contornos. 32. Integrales de contorno. 33. Ejemplos. 34. Primitivas. 35. El teorema de Cauchy-Goursat. 36. Un lema preliminar. 37. Demostración del teorema de Cauchy-Goursat. 38. Dominios simplemente conexos y múltiplemente conexos. 39. La fórmula integral de Cauchy. 40. Derivadas de las funciones analíticas. 41. El teorema

de Morera. 42. Módulos máximos de funciones.
43. El teorema de Liouville y el teorema fundamental del álgebra.

Capítulo 5 Series **151**
44. Convergencia de sucesiones y series. 45. Series de Taylor. 46. Ejemplos. 47. Series de Laurent.
48. Ejemplos. 49. Convergencia absoluta y uniforme de las series de potencias. 50. Integración y derivación de series de potencias. 51. Unicidad de las representaciones por series. 52. Multiplicación y división de series de potencias.

Capítulo 6 Residuos y polos **190**
53. Residuos. 54. El teorema de los residuos.
55. Parte principal de una función. 56. Residuos en los polos. 57. Ceros y polos de orden m. 58. Cálculo de integrales reales impropias. 59. Integrales impropias en las que aparecen senos y cosenos. 60. Integrales definidas en las que aparecen senos y cosenos. 61. Integración a lo largo de un corte de ramificación. 62. Transformadas inversas de Laplace. 63. Residuos logarítmicos y teorema de Rouché.

Capítulo 7 Transformaciones por funciones elementales **235**
64. Funciones lineales. 65. La función $1/z$.
66. Tranformaciones racionales lineales.
67. Transformaciones del semiplano superior.
68. La transformación $w = \exp z$ y los logaritmos.
69. La transformación $w = \operatorname{sen} z$. 70. La función z^2.
71. La función $z^{1/2}$. 72. Raíces cuadradas de polinomios.

Capítulo 8 Transformaciones conformes **270**
73. Conservación de ángulos. 74. Otras propiedades.
75. Armónicas conjugadas. 76. Transformaciones de funciones armónicas. 77. Transformación de las condiciones de contorno

Capítulo 9 Aplicaciones de las transformaciones conformes **289**
78. Temperaturas estacionarias. 79. Temperaturas estacionarias en un semiplano. 80. Un problema relacionado. 81. Temperaturas en un cuadrante.
82. Potencial electrostático. 83. Potencial en un espacio cilíndrico. 84. Flujo de un fluido bidimensional.
85. La función de corriente. 86. Flujos en torno a una esquina y a un cilindro.

Capítulo 10 La transformación de Schwarz-Christoffel **319**
87. Aplicación del eje real sobre un polígono.
88. La transformación de Schwarz-Christoffel.

89. Triángulos y rectángulos. 90. Polígonos degenerados.
91. Flujo de fluido en un canal a través de una rendija.
92. Flujo en un canal con recodo. 93. Potencial electrostático en el borde de una placa conductora.

Capítulo 11 Fórmulas integrales de tipo Poisson **344**
94. Fórmula integral de Poisson. 95. Problema de Dirichlet para un disco. 96. Problemas de contorno relacionados. 97. Fórmula integral de Schwarz.
98. Problema de Dirichlet para un semiplano.
99. Problema de Neumann para un disco. 100. Problema de Neumann para un semiplano.

Capítulo 12 Teoría de funciones complementaria **365**
101. Condiciones bajo las cuales $f(z) \equiv 0$.
102. Prolongación analítica. 103. Principio de reflexión.
104. Puntos singulares evitables y esenciales.
105. Principio del argumento. 106. Una superficie de Riemann para $\log z$. 107. Una superficie para $z^{1/2}$.
108. Superficies para funciones relacionadas.

Apéndices
1. Bibliografía **386**
2. Tabla de transformaciones de regiones **389**

Indice **397**

SOBRE LOS AUTORES

RUEL V. CHURCHILL fue, hasta su fallecimiento, Profesor Emérito de Matemáticas en la Universidad de Michigan, donde comenzó su carrera docente en 1922. Recibió su B.S. en Física en la Universidad de Chicago y su M.S. en Física y grado de Doctor en Matemáticas en la Universidad de Michigan. Es coautor con el Dr. Brown de la reciente cuarta edición de *Fourier Series and Boundary Value Problems*, un texto clásico que escribió hace unos cincuenta años. Fue también autor de *Operational Mathematics*, ya en su tercera edición. A lo largo de su extensa y productiva trayectoria, el Dr. Churchill ocupó diversos cargos en la Mathematical Association of America y en otras sociedades e instituciones matemáticas.

JAMES WARD BROWN es Profesor de Matemáticas en la Universidad de Michigan-Dearborn. Obtuvo su A.B. en Física en la Universidad de Harvard y su A.M. y su grado de Doctor en Matemáticas en la Universidad de Michigan en Ann Arbor, siendo becario del Institute of Science and Technology. Es coautor con el Dr. Churchill de la cuarta edición de *Fourier Series and Boundary Value Problems*.

PREFACIO

Este libro es una revisión de la cuarta edición, publicada en 1984. Esa edición, al igual que las precedentes, ha servido como texto de un curso de introducción a la teoría y aplicaciones de las funciones de una variable compleja. Esta revisión preserva el estilo y el contenido básico de las anteriores, escritas las dos primeras por Ruel V. Churchill.

En esta edición, el segundo autor se ha concentrado en la revisión de los primeros ocho capítulos. Por mencionar algunas de las mejoras más significativas, ahora el tratamiento de las primitivas precede y motiva la presentación del teorema de Cauchy-Goursat, se ilustra el uso de los residuos en el cálculo de transformadas inversas de Laplace, el teorema de Rouché aparece mucho antes en el texto, y las transformaciones en el capítulo de aplicaciones se han reordenado con el fin de hacer que las más difíciles estén ubicadas al final.

Como ejemplos de otras mejoras, el punto del infinito se introduce ahora de modo más natural con la definición de límite, se han añadido varios ejemplos de aplicaciones al hablar por vez primera de funciones de una variable compleja, y se ha reforzado la motivación de la función logaritmo. Además, se ha simplificado la deducción de diversas identidades trigonométricas, la demostración del principio del módulo máximo es ahora más autocontenida, y el teorema de Laurent se presenta de un modo más conveniente para su utilización. Finalmente, se ha mejorado la exposición en general y se ha modificado o añadido un número considerable de figuras y ejercicios.

Tal como sucedía con la primera edición, el *primer objetivo* de esta cuarta es desarrollar de forma rigurosa y autocontenida aquellas partes de la teoría que son esenciales en sus aplicaciones. El *segundo objetivo* es proporcionar una introducción a las aplicaciones de los residuos y de las transformaciones conformes. Se ha puesto especial énfasis en resolver problemas de contorno que aparecen en el estudio de conducción del calor, potencial electrostático y flujo de fluidos. Por tanto, el libro puede ser considerado como complementario de los volúmenes *Fourier Series and Boundary Value Problems*, de los autores, y *Operational Mathematics*, de Ruel V. Churchill, en los que se analizan otros métodos clásicos de resolución de ese tipo de problemas. El citado en último lugar contiene también aplicaciones de los residuos en relación con la transformación de Laplace.

Los primeros nueve capítulos de este libro, con varias sustituciones de los restantes, han constituido durante años el contenido de un curso de tres horas semanales en la Universidad de Michigan. Los alumnos provenían de Matemáticas, Ingeniería o Física. Antes de seguir este curso, habían pasado al menos por cursos de Cálculo, a veces incluso avanzado, y de introducción a las Ecuaciones Diferenciales. Para acomodarse a la audiencia más amplia posible, hay notas a pie de página que se refieren a libros en los que pueden consultarse demostraciones y discusiones de los aspectos más delicados del Cálculo que se van necesitando en cada momento. Parte del material de este libro es opcional y puede dejarse como lectura voluntaria para los estudiantes, fuera del curso normal. Si se desean ver en el curso las aplicaciones por funciones elementales y las transformaciones conformes antes de lo que aquí se presentan, puede pasarse directamente a los capítulos 7, 8 y 9, nada más terminar el capítulo 3.

La mayor parte de los resultados básicos se enuncian como teoremas, seguidos por ejemplos y ejercicios ilustrativos. En el Apéndice 1 se recoge bibliografía sobre otros libros, en general más avanzados. El Apéndice 2 contiene una tabla de transformaciones conformes útiles en la práctica.

En la preparación de esta revisión, el segundo autor ha aprovechado sugerencias de diversas personas. Entre los amigos que han utilizado la versión anterior y han hecho aportaciones específicas se encuentran B. S. Elenbogen, M. H. Höft, M. Jerison, y M. A. Lachance. Ha habido, asimismo, considerables sugerencias de quienes han revisado partes de la edición anterior y el manuscrito de la presente: S. H. Davis, Rice University; P. M. Fitzpatrick, University of Maryland; R. A. Fontenot, Whitman College; H. Hochstadt, Polytechnic University; W. L. Perry, Texas A&M University; F. Rispoli, Dowling College; y C. H. Wilcox, University of Utah.

He recibido además el interés constante y el apoyo de G. H. Brown, Jr., J. R. Brown, S. M. Flack, G. E. Hay, S. J. Milles, R. P. Morash, J. A. Moss, F. J. Papp, y R. L. Patterson, así como Robert A. Weinstein, Michael Morales, y Scott Amerman, del departamento editorial de McGraw-Hill.

James Ward Brown

CAPITULO
UNO

NUMEROS COMPLEJOS

En este capítulo estudiamos la estructura algebraica y geométrica de los números complejos. Suponemos conocidas varias propiedades correspondientes en los números reales.

1. DEFINICION

Los *números complejos* z se pueden definir como pares ordenados

$$z = (x, y) \qquad [1]$$

de números reales x e y, con las operaciones de suma y producto que especificaremos más adelante. Se suelen identificar los pares $(x, 0)$ con los números reales x. El conjunto de los números complejos contiene, por tanto, a los números reales como subconjunto. Los números complejos de la forma $(0, y)$ se llaman *números imaginarios puros*. Los números reales x e y en la expresión [1] se conocen, respectivamente, como *parte real* y *parte imaginaria* de z. Escribiremos:

$$\text{Re } z = x, \quad \text{Im } z = y. \qquad [2]$$

Dos números complejos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) se dicen *iguales* si tienen iguales las partes real e imaginaria. Es decir:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \quad \text{si y sólo si} \quad x_1 = x_2 \quad \text{e} \quad y_1 = y_2. \qquad [3]$$

La *suma* $z_1 + z_2$ y el *producto* $z_1 z_2$ de dos números complejos $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$ se definen por las ecuaciones:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \qquad [4]$$

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, y_1 x_2 + x_1 y_2). \qquad [5]$$

En particular, $(x, 0) + (0, y) = (x, y)$ y $(0, 1)(y, 0) = (0, y)$; luego

$$(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0). \qquad [6]$$

Nótese que las operaciones definidas por las ecuaciones [4] y [5] son las usuales cuando se restringen a los números reales:

$$(x_1, 0) + (x_2, 0) = (x_1 + x_2, 0),$$
$$(x_1, 0)(x_2, 0) = (x_1x_2, 0).$$

El sistema de los números complejos es, en consecuencia, una extensión natural del de los números reales.

Pensando en un número real como x o como $(x, 0)$, y *denotando por i el número imaginario puro* $(0, 1)$, podemos reescribir la Ecuación [6] así*

$$(x, y) = x + iy. \qquad [7]$$

Asimismo, con el convenio $z^2 = zz$, $z^3 = zz^2$, etc., hallamos que

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0);$$

es decir,

$$i^2 = -1.$$

A la vista de la expresión [7], las Ecuaciones [6] y [7] se convierten en

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \qquad [8]$$
$$(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2). \qquad [9]$$

Obsérvese que los miembros de la derecha en esas ecuaciones se pueden obtener formalmente manipulando los términos de la izquierda como si sólo contuvieran números reales, y sustituyendo i^2 por -1 cuando aparezca.

2. PROPIEDADES ALGEBRAICAS

Varias propiedades de la suma y del producto de números complejos coinciden con las de los números reales. Recogeremos aquí las más básicas y verificamos algunas de ellas.

Las leyes conmutativas

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1z_2 = z_2z_1 \qquad [1]$$

* En electrónica se utiliza el símbolo j en lugar de i.

y las asociativas

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3) \qquad [2]$$

se siguen fácilmente de las definiciones de la suma y el producto de números complejos, y del hecho de que los números reales las satisfacen. Por ejemplo, si

$$z_1 = (x_1, y_1) \quad \text{y} \quad z_2 = (x_2, y_2),$$

entonces

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) = (x_2 + x_1, y_2 + y_1)$$
$$= (x_2, y_2) + (x_1, y_1) = z_2 + z_1.$$

La verificación de las restantes, así como de la ley distributiva

$$z(z_1 + z_2) = zz_1 + zz_2, \qquad [3]$$

es similar.

De acuerdo con la ley conmutativa del producto, $iy = yi$; luego está permitido escribir

$$z = x + iy \quad \text{o} \quad z = x + yi.$$

Además, por las leyes asociativas, una suma $z_1 + z_2 + z_3$ o un producto $z_1z_2z_3$ están bien definidos sin paréntesis, igual que ocurría con los números reales.

La identidad aditiva $0 = (0, 0)$ y la identidad multiplicativa $1 = (1, 0)$ de los números reales se transfieren al sistema de los números complejos. O sea,

$$z + 0 = z \quad \text{y} \quad z \cdot 1 = z \qquad [4]$$

para todo número complejo z. Más aún, 0 y 1 son los únicos números complejos con tales propiedades. Para establecer la unicidad de 0, supongamos que (u, v) es una identidad aditiva, y escribamos

$$(x, y) + (u, v) = (x, y),$$

donde (x, y) es cualquier número complejo. Se deduce que

$$x + u = x \quad \text{e} \quad y + v = y;$$

o sea, $u = 0$ y $v = 0$. El número complejo $0 = (0, 0)$ es, por tanto, la única identidad aditiva.

Cada número complejo $z = (x, y)$ tiene asociado un inverso aditivo

$$-z = (-x, -y) \qquad [5]$$

que satisface la ecuación $z + (-z) = 0$. Además, hay un sólo inverso aditivo para cada z, pues la ecuación $(x, y) + (u, v) = (0, 0)$ implica que $u = -x$ y $v = -y$. Los inversos aditivos se usan para definir la resta:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2). \qquad [6]$$

Luego si $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$, entonces

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \qquad [7]$$

Análogamente, para todo número complejo $z = (x, y)$ no nulo, existe un número complejo z^{-1} tal que $zz^{-1} = 1$. Este inverso multiplicativo es menos obvio que el aditivo. Para hallarlo, buscamos números reales u, v expresados en términos de x e y, tales que

$$(x, y)(u, v) = (1, 0).$$

Según la Ecuación [5] de la Sección 1, que define el producto de dos números complejos, u y v han de satisfacer el par

$$xu - yv = 1, \quad yu + xv = 0$$

de ecuaciones lineales simultáneas; y un sencillo cálculo proporciona la única solución

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

De modo que el inverso multiplicativo de $z = (x, y)$ es

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) \quad (z \neq 0). \qquad [8]$$

La existencia de inversos multiplicativos nos capacita para demostrar que *si un producto z_1z_2 es cero, entonces al menos uno de los factores, z_1 o z_2, es cero.* Porque supongamos que $z_1z_2 = 0$ y que $z_1 \neq 0$. El inverso multiplicativo z_1^{-1} existe y, según la definición de la multiplicación, todo número complejo por cero da cero. Luego

$$z_2 = 1 \cdot z_2 = (z_1^{-1}z_1)z_2 = z_1^{-1}(z_1z_2) = z_1^{-1} \cdot 0 = 0. \qquad [9]$$

Esto es, si $z_1z_2 = 0$, o bien $z_1 = 0$ o $z_2 = 0$, o quizá ambos son cero. Otra forma de enunciar este resultado es decir que si dos números complejos son distintos de cero, su producto también es distinto de cero.

La división por un número complejo no nulo se define mediante:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1z_2^{-1} \quad (z_2 \neq 0). \qquad [10]$$

Si $z_1 = (x_1, y_1)$ y $z_2 = (x_2, y_2)$, las Ecuaciones [8] y [10] prueban que

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) + i\left(\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) \quad (z_2 \neq 0). \qquad [11]$$

El cociente z_1/z_2 no está definido cuando $z_2 = 0$; nótese que $z_2 = 0$ significa que $x_2^2 + y_2^2 = 0$, y esto no está permitido en las expresiones [11].

Finalmente, mencionamos algunas identidades relativas a los cocientes, no por esperadas menos útiles. Están basadas en la relación

$$\frac{1}{z_2} = z_2^{-1} \quad (z_2 \neq 0), \qquad [12]$$

que es la Ecuación [10] para $z_1 = 1$, y que nos permite escribir esa ecuación en la forma

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1\left(\frac{1}{z_2}\right) \quad (z_2 \neq 0). \qquad [13]$$

Observando que (véase Ejerc. 11)

$$(z_1z_2)(z_1^{-1}z_2^{-1}) = (z_1z_1^{-1})(z_2z_2^{-1}) = 1 \quad (z_1 \neq 0, z_2 \neq 0),$$

y que, por tanto, $(z_1z_2)^{-1} = z_1^{-1}z_2^{-1}$, uno puede usar la relación [12] para comprobar la identidad

$$\frac{1}{z_1z_2} = \left(\frac{1}{z_1}\right)\left(\frac{1}{z_2}\right) \quad (z_1 \neq 0, z_2 \neq 0). \qquad [14]$$

Con la ayuda de las Ecuaciones [13] y [14], es ya fácil mostrar que

$$\frac{z_1 + z_2}{z_3} = \frac{z_1}{z_3} + \frac{z_2}{z_3}, \quad \frac{z_1z_2}{z_3z_4} = \left(\frac{z_1}{z_3}\right)\left(\frac{z_2}{z_4}\right) \quad (z_3 \neq 0, z_4 \neq 0). \qquad [15]$$

Ejemplo. Cálculos como el que sigue quedan ahora justificados:

$$\left(\frac{1}{2 - 3i}\right)\left(\frac{1}{1 + i}\right) = \frac{1}{5 - i} = \left(\frac{1}{5 - i}\right)\left(\frac{5 + i}{5 + i}\right) = \frac{5 + i}{26} = \frac{5}{26} + \frac{1}{26}i.$$

EJERCICIOS

1. Comprobar que:

a) $(\sqrt{2} - i) - i(1 - \sqrt{2}i) = -2i$; *b)* $(2, -3)(-2, 1) = (-1, 8)$;

c) $(3, 1)(3, -1)\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right) = (2, 1)$; *d)* $\frac{1 + 2i}{3 - 4i} + \frac{2 - i}{5i} = -\frac{2}{5}$;

e) $\frac{5}{(1 - i)(2 - i)(3 - i)} = \frac{i}{2}$; *f)* $(1 - i)^4 = -4$.

2. Demostrar que $(1 + z)^2 = 1 + 2z + z^2$.

3. Comprobar que los números complejos $z = 1 \pm i$ satisfacen la ecuación $z^2 - 2z + 2 = 0$.

4. Resolver la ecuación $z^2 + z + 1 = 0$ para $z = (x, y)$ escribiendo

$$(x, y)(x, y) + (x, y) + (1, 0) = (0, 0)$$

y resolviendo entonces un par de ecuaciones lineales simultáneas en x e y.

Sugerencia: Nótese que ningún número real x satisface la ecuación dada para probar que $y \neq 0$.

Sol. $z = \left(-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

5. Probar que la multiplicación es conmutativa, tal como se afirmó en la segunda Ecuación[1], Sección 2.

6. Verificar la ley asociativa de la suma, enunciada en la primera de las Ecuaciones [2], Sección 2.

7. Verificar la ley distributiva [3], Sección 2.

8. Usar la ley asociativa de la suma y la ley distributiva para demostrar que

$$z(z_1 + z_2 + z_3) = zz_1 + zz_2 + zz_3.$$

9. Probar que el número complejo $1 = (1, 0)$ es la única identidad multiplicativa.

Sugerencia: Nótese que si (u, v) es un inverso multiplicativo, entonces en particular,

$$(1, 0)(u, v) = (1, 0).$$

10. Probar que:

a) $\text{Im}(iz) = \text{Re}\, z$; *b)* $\text{Re}(iz) = -\text{Im}\, z$;

c) $\frac{1}{1/z} = z \quad (z \neq 0)$; *d)* $(-1)z = -z$.

11. Mediante las leyes asociativa y conmutativa del producto, probar que

$$(z_1z_2)(z_3z_4) = (z_1z_3)(z_2z_4).$$

12. Demostrar que si $z_1z_2z_3 = 0$, entonces al menos uno de los factores es nulo.

13. Comprobar la identidad [14], Sección 2.

14. Establecer la primera de las identidades [15], Sección 2.

15. Probar la segunda de las identidades [15] de la Sección 2, y usarla para demostrar la ley de cancelación

$$\frac{zz_1}{zz_2} = \frac{z_1}{z_2} \quad (z \neq 0, z_2 \neq 0).$$

16. Establecer por inducción matemática la fórmula del binomio

$$(z_1 + z_2)^n = z_1^n + \frac{n}{1!} z_1^{n-1}z_2 + \frac{n(n-1)}{2!} z_1^{n-2}z_2^2 + \cdots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} z_1^{n-k}z_2^k + \cdots + z_2^n,$$

donde z_1 y z_2 son número complejos arbitrarios, y n es un entero positivo ($n = 1, 2, \ldots$).

3. INTERPRETACION GEOMETRICA

Es natural asociar el número complejo $z = x + iy$ con un punto del plano cuyas coordenadas rectangulares son x e y. Cada número complejo corresponde a un punto exactamente, y recíprocamente. El número $-2 + i$, por ejemplo, viene representado por el punto $(-2, 1)$ en la Figura 1. El número z puede pensarse como el segmento dirigido, o vector, que va desde el origen hasta el punto (x, y). De hecho, a menudo nos referiremos al número complejo como el punto z o como el vector z. Cuando se utiliza a efectos de representar geométricamente los números $z = x + iy$, el plano xy se llama *plano complejo* o *plano z*. El eje x se llama *eje real*, y el eje y se llama *eje imaginario*.

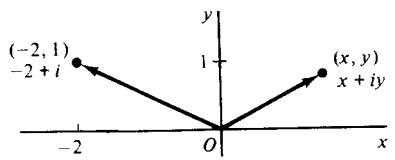


Figura 1

De acuerdo con la definición de suma de dos números complejos $z_1 = x_1 + y_1$ y $z_2 = x_2 + y_2$, el número $z_1 + z_2$ corresponde al punto $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Corresponde, asimismo, a un vector con esas coordenadas como componentes. Por tanto, $z_1 + z_2$ se puede obtener vectorialmente como indica la Figura 2. La diferencia $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ corresponde a la suma de los vectores de z_1 y $-z_2$ (Fig. 3). Hagamos notar que, trasladando el radio vector $z_1 - z_2$ en la Figura 3, cabe interpretar $z_1 - z_2$ como el segmento dirigido desde el punto (x_2, y_2) hasta el (x_1, y_1).

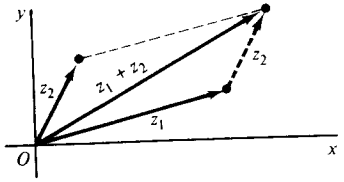


Figura 2

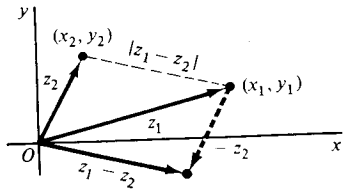


Figura 3

Aunque el producto de dos números complejos z_1 y z_2 es el mismo número complejo representado por un vector, ese vector está en el mismo plano que los vectores de z_1 y z_2. Es evidente, pues, que ese producto no es ni el producto escalar ni el producto vectorial que se usan en el análisis vectorial ordinario. La interpretación geométrica del producto de z_1 y z_2 se discutirá en la Sección 5.

El *módulo*, o valor absoluto, de un número complejo $z = x + iy$ se define como el número real ~~negativo~~ $\sqrt{x^2 + y^2}$ y se denota $|z|$; esto es,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad [1]$$

Geométricamente, el número $|z|$ es la distancia entre el punto (x, y) y el origen, o sea, la longitud del vector que representa a z. Se reduce al valor absoluto usual de los números reales cuando $y = 0$. Nótese que mientras *la desigualdad* $z_1 < z_2$ *carece de sentido a menos que* z_1 *y* z_2 *sean ambos reales*, es decir, que $|z_1| < |z_2|$ significa que el punto z_1 está más cerca del origen que z_2.

Ejemplo 1. Como $|-3 + 2i| = \sqrt{13}$ y $|1 + 4i| = \sqrt{17}$, el punto $-3 + 2i$ está más próximo del origen que $1 + 4i$.

La distancia entre dos puntos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ es $|z_1 - z_2|$. Eso es claro a la vista de la Figura 3, porque $|z_1 - z_2|$ es la longitud del vector que representa a $z_1 - z_2$. Alternativamente, se deduce de la definición [1] y de la expresión

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

que

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Los números complejos z correspondientes a los puntos del círculo con centro en el origen y radio R, satisfacen la ecuación $|z - z_0| = R$, y recíprocamente. Nos referiremos a ese conjunto de puntos como el círculo $|z - z_0| = R$.

Ejemplo 2. La ecuación $|z - 1 + 3i| = 2$ representa el círculo centrado en $z_0 = (1, -3)$ y de radio $R = 2$.

De la definición [1] se sigue que los números reales $|z|$, Re $z = x$, e Im $z = y$ están relacionados por la ecuación

$$|z|^2 = (\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2. \qquad [2]$$

Así pues

$$\text{Re } z \leqq |\text{Re } z| \leqq |z|, \quad \text{Im } z \leqq |\text{Im } z| \leqq |z|. \qquad [3]$$

El *complejo conjugado*, o simplemente el conjugado, de un número complejo $z = x + iy$ se define como el número complejo $x - iy$, denotado por $\bar{z}$; esto es,

$$\bar{z} = x - iy. \qquad [4]$$

El número $\bar{z}$ viene representado por el punto $(x, -y)$, reflejado en la recta real del punto (x, y) que representaba a z (Fig. 4). Nótese que $\bar{\bar{z}} = z$ y $|\bar{z}| = |z|$ para todo z.

Si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$, entonces

$$\overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2).$$

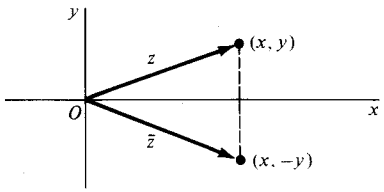


Figura 4

Así que el conjugado de la suma es la suma de los conjugados:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2. \qquad [5]$$

Del mismo modo, es fácil ver que

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2, \qquad [6]$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2, \qquad [7]$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0). \qquad [8]$$

La suma $z + \bar{z}$ de un número complejo y su conjugado es el número real $2x$, y la diferencia $z - \bar{z}$ es el número imaginario puro $2iy$. Por tanto,

$$\text{Re } z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \text{Im } z = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \qquad [9]$$

Una identidad importante que relaciona el conjugado de un número complejo con su módulo es

$$z\bar{z} = |z|^2, \qquad [10]$$

donde cada lado es igual a $x^2 + y^2$. Proporciona otro método de determinar el cociente z_1/z_2 en las expresiones [11], Sección 2. El procedimiento consiste en multiplicar numerador y denominador por $\bar{z}_2$, de manera que el denominador se convierte en el número real $|z_2|^2$.

Ejemplo 3. Como ilustración,

$$\frac{-1 + 3i}{2 - i} = \frac{(-1 + 3i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{-5 + 5i}{|2 - i|^2} = \frac{-5 + 5i}{5} = -1 + i.$$

Véase también el ejemplo del final de la Sección 2.

Con ayuda de la identidad [10], podemos obtener fácilmente otras propiedades de los módulos a partir de las de los conjugados ya vistos. Mencionemos que

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \qquad [11]$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad (z_2 \neq 0). \qquad [12]$$

Para establecer la propiedad [11], escribimos

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)} = (z_1\bar{z}_1)(z_2\bar{z}_2) = |z_1|^2|z_2|^2 = (|z_1||z_2|)^2$$

y recordemos que un módulo nunca es negativo. La propiedad [12] es verificable de forma análoga.

4. DESIGUALDAD TRIANGULAR

Las propiedades de los módulos y de los conjugados de la Sección 3 hacen posible deducir algebraicamente la *desigualdad triangular*, que proporciona una cota superior al módulo de la suma de dos números complejos z_1 y z_2:

$$|z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|. \qquad [1]$$

Esta importante desigualdad es geométricamente evidente de la Figura 2 de la Sección 3. En efecto, es sencillamente la afirmación de que la longitud de un lado de un triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados. Vemos en la Figura 2 que [1] es realmente una igualdad cuando los puntos z_1, z_2 y 0 son colineales.

Iniciamos la deducción algebraica escribiendo

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)$$

y efectuando el producto de la derecha. Eso lleva a

$$|z_1 + z_2|^2 = z_1\bar{z}_1 + (z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2}) + z_2\bar{z}_2.$$

Ahora bien

$$z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} = 2\mathrm{Re}\,(z_1\bar{z}_2) \leqq 2|z_1\bar{z}_2| = 2|z_1||z_2|;$$

luego

$$|z_1 + z_2|^2 \leqq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2,$$

o sea,

$$|z_1 + z_2|^2 \leqq (|z_1| + |z_2|)^2.$$

Como los módulos son no negativos, se deduce la desigualdad [1].

La desigualdad triangular se puede generalizar por medio de la inducción matemática a sumas de cualquier número finito de términos:

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| \quad (n = 2, 3, \ldots). \qquad [2]$$

Para entrar en los detalles de la demostración, digamos que cuando $n = 2$, la desigualdad [2] es justamente la desigualdad [1]. Además, si se supone que [2] es válida cuando $n = m$, ha de serlo también para $n = m + 1$, puesto que por la desigualdad triangular,

$$\begin{aligned}|(z_1 + z_2 + \cdots + z_m) + z_{m+1}| &\leqq |z_1 + z_2 + \cdots + z_m| + |z_{m+1}| \\ &\leqq (|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_m|) + |z_{m+1}|\,.\end{aligned}$$

También se desprende de [1] que

$$|z_1 + z_2| \geqq ||z_1| - |z_2||. \qquad [3]$$

Para deducir la desigualdad [3], escribimos

$$|z_1| = |(z_1 + z_2) + (-z_2)| \leqq |z_1 + z_2| + |-z_2|,$$

de modo que

$$|z_1 + z_2| \geqq |z_1| - |z_2|. \qquad [4]$$

Esta es la desigualdad [3] cuando $|z_1| \geqq |z_2|$. Si $|z_1| < |z_2|$, necesitamos sólo intercambiar z_1 y z_2 en [4] para obtener

$$|z_1 + z_2| \geqq -(|z_1| - |z_2|),$$

que es el resultado deseado. La desigualdad [3] nos dice, naturalmente, que la longitud de un lado de un triángulo es mayor o igual que la diferencia entre las longitudes de los otros dos lados. (Véase Fig. 2 de la Sec. 3.)

Se obtienen formas alternativas útiles de las desigualdades [1] y [3] al sustituir z_2 por $-z_2$:

$$|z_1 - z_2| \leqq |z_1| + |z_2|, \qquad [5]$$

$$|z_1 - z_2| \geqq ||z_1| - |z_2||. \qquad [6]$$

Ejemplo. Si un punto z está en el círculo unidad $|z| = 1$ centrado en el origen, entonces

$$|z^2 + z + 1| \leqq |z|^2 + |z| + 1 = 3$$

y

$$|z^3 - 2| \geqq ||z|^3 - 2| = 1.$$

EJERCICIOS

1. Localizar los números $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$ vectorialmente, si:

a) $z_1 = 2i, z_2 = \frac{2}{3} - i$; *b)* $z_1 = (-\sqrt{3}, 1), z_2 = (\sqrt{3}, 0)$;

c) $z_1 = (-3, 1), z_2 = (1, 4)$; *d)* $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_1 - iy_1$.

2. Probar que:

a) $\overline{\bar{z} + 3i} = z - 3i$; *b)* $\overline{i\bar{z}} = -i\bar{z}$; *c)* $\overline{(2 + i)^2} = 3 - 4i$;

d) $|(2\bar{z} + 5)(\sqrt{2} - i)| = \sqrt{3}|2z + 5|$.

3. Verificar las desigualdades [3], Sección 3, relativas a Re z, Im z y $|z|$.

4. Probar que $\sqrt{2}|z| \geqq |\text{Re } z| + |\text{Im } z|$.

5. Comprobar las propiedades [6] y [7] de $\bar{z}$ en la Sección 3.

6. Probar que:

a) z es real si y sólo si $\bar{z} = z$;
b) z es real o imaginario puro si y sólo si $(\bar{z}^2) = z^2$.

7. Usar la propiedad $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$ para verificar que: *a)* $\overline{z_1 z_2 z_3} = \bar{z}_1\bar{z}_2\bar{z}_3$; *b)* $\overline{(z^4)} = (\bar{z})^4$.

8. Verificar la propiedad [12] de los módulos, Sección 3.

9. Usar los resultados de la Sección 3 para demostrar que cuando z_1 y z_2 son no nulos:

a) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2 z_3}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2\bar{z}_3}$; *b)* $\left|\frac{z_1}{z_2 z_3}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2||z_3|}$.

10. Con ayuda de las desigualdades de la Sección 4, probar que cuando $|z_3| \neq |z_4|$,

$$\left|\frac{z_1 + z_2}{z_3 + z_4}\right| \leqq \frac{|z_1| + |z_2|}{||z_3| - |z_4||}.$$

11. En cada caso, esbozar el conjunto de puntos determinado por la condición expuesta:

a) $|z - 1 + i| = 1$; *b)* $|z + i| \leqq 3$; *c)* $\text{Re}\,(\bar{z} - i) = 2$;

d) $|2z - i| = 4$.

12. Aplicar las desigualdades de las Secciones 3 y 4 para demostrar que

$$|\text{Im}\,(1 - \bar{z} + z^2)| < 3 \quad \text{cuando} \quad |z| < 1.$$

13. Factorizando $z^4 - 4z^2 + 3$ en dos factores cuadráticos y usando entonces la desigualdad [6] de la Sección 4, probar que si z está en el cículo $|z| = 2$, entonces

$$\left|\frac{1}{z^4 - 4z^2 + 3}\right| \leqq \frac{1}{3}.$$

14. En la Sección 2 se demuestra que si $z_1 z_2 = 0$, al menos uno de los factores ha de ser cero. Dar otra demostración basada en el resultado análogo para los números reales, mediante la identidad [11], Sección 3.

15. Probar por inducción que cuando $n = 2, 3, \ldots,$

a) $\overline{z_1 + z_2 + \cdots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \cdots + \bar{z}_n$; *b)* $\overline{z_1 z_2 \cdots z_n} = \bar{z}_1\bar{z}_2 \cdots \bar{z}_n$.

16. Sean $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n (n \geqq 1)$ números *reales*, y z cualquier número complejo. Con la ayuda de los resultados del Ejercicio 15, probar que

$$\overline{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n} = a_0 + a_1\bar{z} + a_2\bar{z}^2 + \cdots + a_n\bar{z}^n.$$

17. Demostrar que la ecuación $|z - z_0| = R$ del círculo con centro en z_0 y radio R, se puede escribir

$$|z|^2 - 2\text{Re}\,(z\bar{z}_0) + |z_0|^2 = R^2.$$

18. Usando las expresiones [9], Sección 3, para Re z e Im z, probar que la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ puede escribirse

$$z^2 + \bar{z}^2 = 2.$$

19. Usando el hcho de que $|z_1 - z_2|$ es la distancia entre los puntos z_1 y z_2, dar un argumento geométrico para ver que

a) la ecuación $|z - 4i| + |z + 4i| = 10$ representa una elipse con focos en $(0, \pm 4)$;

b) la ecuación $|z - 1| = |z + i|$ representa la recta de pendiente -1 que pasa por el origen.

5. FORMA POLAR

Sean r y θ coordenadas polares del punto (x, y) que corresponde a un número complejo no nulo $z = x + iy$. Como

$$x = r \cos \theta \qquad \text{e} \qquad y = r \operatorname{sen} \theta, \tag{1}$$

z puede ser expresado en forma polar como

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta). \tag{2}$$

En análisis complejo, no se admiten r negativos; sin embargo, como en el Cálculo, θ tiene infinitos valores posibles, incluyendo valores negativos.

Ejemplo 1. El número complejo $1 - i$, que está en el cuarto cuadrante, pasa a ser

$$1 - i = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] \tag{3}$$

en forma polar. Obsérvese que cualquiera de los valores

$$\theta = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

puede ser usado aquí. Por ejemplo,

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{7\pi}{4}\right).$$

El número positivo r es la longitud del vector correspondiente a z; es decir, $r = |z|$. El número θ se llama un *argumento* de z, y escribimos $\theta = \arg z$. Así pues, geométricamente, $\arg z$ denota el ángulo, medido en radianes, que forma z con el eje real positivo, cuando z se interpreta como un radio vector (Fig. 5). Toma cualquier valor de entre infinitos posibles, que difieren dos a dos en múltiplos de 2π. Estos valores se pueden determinar mediante la ecuación

$$\tan \theta = \frac{y}{x}, \tag{4}$$

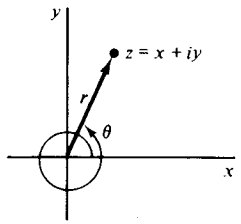


Figura 5

donde el cuadrante que contiene al punto correspondiente a z debe ser especificado. En general, entonces, si

$$z = r[\cos(\theta + 2n\pi) + i \operatorname{sen}(\theta + 2n\pi)] \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{5}$$

donde r es el módulo de z y θ es cualquier valor particular de $\arg z$.

Si $z = 0$, θ es indefinido. De modo que cualquier número complejo que vaya a ser escrito en polares se sobreentiende que es distinto de cero, aunque tal requisito no se haga explícito.

El *valor principal* de $\arg z$, denotado $\operatorname{Arg} z$, se define como el único valor de $\arg z$ tal que $-\pi < \arg z \leqq \pi$. El valor principal se ha usado en la expresión [3] para el número $1 - i$. Nótese que $\arg z = \operatorname{Arg} z + 2n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Asimismo, cuando z es un número real negativo, $\operatorname{Arg} z = \pi$.

Vamos ahora con una importante identidad sobre los argumentos, a saber,

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \tag{6}$$

Debe interpretarse diciendo que si se especifican dos de esos tres argumentos (multivaluados), entonces existe un valor del tercer argumento que satisface la ecuación.

Para demostrarlo, partimos de z_1 y z_2 en forma polar:

$$z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1), \qquad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2). \tag{7}$$

Efectuando el producto se ve que

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)],$$

y esto se reduce a la forma polar del producto

$$z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)] \tag{8}$$

Ahora bien, θ_1 y θ_2 pueden ser valores cualesquiera de $\arg z_1$ y $\arg z_2$, respectivamente, y queda claro por la Ecuación (8) que $\theta_1 + \theta_2$ es un valor de $\arg(z_1 z_2)$ (véase Fig. 6).

Si, por otra parte, se especifican valores de $\arg(z_1 z_2)$ y de $\arg z_1$, esos valores corresponden a elecciones particulares de n y n_1 en las expresiones

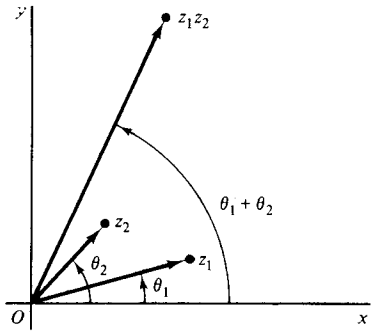


Figura 6

$$\arg (z_1z_2) = (\theta_1 + \theta_2) + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...),$$
$$\arg z_1 = \theta_1 + 2n_1\pi \qquad (n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

Como

$$(\theta_1 + \theta_2) + 2n\pi = (\theta_1 + 2n_1\pi) + [\theta_2 + 2(n - n_1)\pi],$$

la Ecuación [6] se satisface obviamente cuando se escoge el valor

$$\arg z_2 = \theta_2 + 2(n - n_1)\pi.$$

El caso en que se especifican valores de arg (z_1z_2) y arg z_2 se trata de manera análoga. Eso completa la demostración.

La afirmación [6] no siempre es válida cuando se sustituye arg por Arg, como ilustra el próximo ejemplo.

Ejemplo 2. Si $z_1 = -1$ y $z_2 = i$,

$$\text{Arg } (z_1z_2) = \text{Arg } (-i) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{pero} \quad \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.$$

No obstante, si tomamos los valores usados para z_1 y arg z_2 y elegimos el valor arg $(z_1z_2) = 3\pi/2$, la Ecuación [6] queda satisfecha.

Cuando se multiplica un número complejo no nulo $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ por i, el radio vector de iz se obtiene girando el de z un ángulo recto en el sentido positivo (contrario a las agujas de un reloj), sin cambiar su longitud. Ello se debe a que

$$i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right);$$

y, de acuerdo con la Ecuación [8],

$$iz = r\left[\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right].$$

La Ecuación [8] enseña también que la forma polar del único inverso multiplicativo de un número complejo no nulo

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

es

$$z^{-1} = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i \operatorname{sen}(-\theta)], \qquad [9]$$

siendo el producto de estas formas polares igual a la unidad. Como $z_1/z_2 = z_1z_2^{-1}$, tenemos la siguiente expresión para el cociente de los dos números complejos no nulos [7]:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]. \qquad [10]$$

Esto puede utilizarse para comprobar la afirmación

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2, \qquad [11]$$

que es análoga a la [6].

6. FORMA EXPONENCIAL

La ecuación

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta, \qquad [1]$$

que define el símbolo $e^{i\theta}$, o exp $(i\theta)$. para todo valor real de θ, se conoce como *fórmula de Euler*. Si escribimos un número complejo no nulo en forma polar

$$z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta), \qquad [2]$$

la fórmula de Euler permite expresar z más compactamente en *forma exponencial:*

$$z = re^{i\theta}. \qquad [3]$$

La elección del símbolo $e^{i\theta}$ quedará justificada en la Sección 22. Notemos simplemente aquí unas pocas de sus propiedades que al menos sugieren que es una elección natural.

La propiedad aditiva

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{4}$$

es otra manera de expresar [8], Sección 5, para el producto de dos números complejos z_1 y z_2 cuando los módulos r_1 y r_2 son la unidad:

$$(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2) = \cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{sen}\,(\theta_1+\theta_2).$$

Escribiendo $e^{-i\theta}$ en lugar de $e^{i(-\theta)}$, deducimos de la Ecuación [4] que $e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1$; luego $1/e^{i\theta} = e^{-i\theta}$.

Observemos que la forma polar [9], Sección 5, del inverso multiplicativo de un número complejo no nulo $z = re^{i\theta}$ es

$$z^{-1} = \frac{1}{r}e^{i(-\theta)} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} \tag{5}$$

en notación exponencial. Análogamente, cuando $z_1 = r_1\exp(i\theta_1)$ y $z_2 = r_2\exp(i\theta_2)$, las expresiones [8] y [10] de la Sección 5 pueden escribirse

$$z_1z_2 = r_1r_2\exp[i(\theta_1+\theta_2)], \tag{6}$$

y

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\exp[i(\theta_1-\theta_2)], \tag{7}$$

respectivamente. Una importante ventaja de las expresiones [5], [6] y [7] sobre sus contrapartidas de la Sección 5 consiste en la facilidad de retenerlas y usarlas de memoria. Al igual que la propiedad [4], se obtienen formalmente aplicando las reglas algebraicas usuales para los números reales y para exp x.

En vista de la representación polar (Sec. 5)

$$z = r[\cos(\theta+2n\pi) + i\,\text{sen}\,(\theta+2n\pi)] \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots),$$

la expresión [3] es sólo una de las infinitas maneras posibles de la forma exponencial de z:

$$z = re^{i(\theta+2n\pi)} \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots). \tag{8}$$

Ello se sigue también geométricamente cuando θ se interpreta como el ángulo de inclinación del radio vector de longitud r representante del número $z = re^{i\theta}$. Porque está en el círculo de radio r centrado en el origen (Fig. 7), y si se aumenta θ, el punto z se mueve a lo largo del círculo en dirección contraria a la de las agujas del reloj. En particular, cuando θ crece en 2π, volvemos al punto de

partida. Lo mismo es cierto, claro está si θ decrece en 2π. Resulta por tanto evidente de la Fig. 7 que *dos números complejos no nulos* $z_1 = r_1\exp(i\theta_1)$ *y* $z_2 = r_2\exp(i\theta_2)$ *son iguales si y sólo si* $r_1 = r_2$ *y* $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$, *donde* k *es un entero* ($k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$).

La Figura 7, con $r = R$ muestra también que la ecuación

$$z = Re^{i\theta} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi) \tag{9}$$

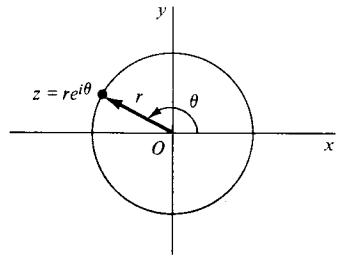


Figura 7

es una representación paramétrica del círculo $|z| = R$, centrado en el origen con radio R. Al crecer el parámetro θ en la Figura 7 a partir de 0 sobre el intervalo $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$, el punto z arranca del eje real positivo y recorre el círculo una vez en el sentido positivo (contrario al de las agujas del reloj). Más en general, el círculo $|z - z_0| = R$, cuyo centro es z_0 y cuyo radio es R, admite la representación paramétrica

$$z = z_0 + Re^{i\theta} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi). \tag{10}$$

Esto puede verse vectorialmente (Fig. 8) sin más que observar que un punto z que recorre en sentido positivo el círculo una vez, corresponde a la suma del vector fijo z_0 y un vector de longitud R cuyo ángulo de inclinación θ varía desde $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$.

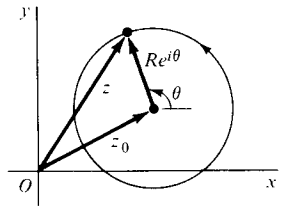


Figura 8

7. POTENCIAS Y RAICES

Las potencias enteras de un número complejo no nulo $z = re^{i\theta}$ vienen dadas por

$$z^n = r^ne^{in\theta} \qquad (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots). \tag{1}$$

Como $z^{n+1} = zz^n$ cuando $n = 1, 2, \ldots$ (Sec. 1), esto se comprueba fácilmente para valores positivos de n por inducción, con ayuda de la expresión [6], Sección 6, para el producto de números complejos en forma exponencial. La ecuación es válida también para $n = 0$ con el convenio de que $z^0 = 1$. Si $n = -1, -2, \ldots$, por otro lado, definimos z^n en términos del inverso multiplicativo de z escribiendo $z^n = (z^{-1})^m$, donde $m = -n = 1, 2, \ldots$ Entonces, como la Ecuación [1] es válida para potencias enteras *positivas*, se sigue de la forma exponencial de z^{-1} en la Sección 6 que

$$z^n = \left[\frac{1}{r}\, e^{i(-\theta)}\right]^m = \left(\frac{1}{r}\right)^m e^{im(-\theta)} = r^n e^{in\theta} \qquad (n = -1, -2, \ldots).$$

Por tanto, la Ecuación [1] es válida para toda potencia entera.

Nótese que si $r = 1$, la Ecuación [1] se convierte en

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad [2]$$

Cuando se expresa en la forma

$$(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \qquad [3]$$

que se conoce como la *fórmula de De Moivre*.

La Ecuación [1] es útil para el cálculo de raíces de números complejos no nulos.

Ejemplo 1. Resolvamos la ecuación

$$z^n = 1, \qquad [4]$$

donde n tiene uno de los valores $n = 2, 3, \ldots$, hallando así las raíces n-ésimas de la unidad. Puesto que $z \neq 0$, podemos escribir $z = re^{i\theta}$ y buscar valores de r y θ tales que

$$(re^{i\theta})^n = 1,$$

o sea

$$r^n e^{in\theta} = 1e^{i0}.$$

Ahora bien, de acuerdo con la frase en bastardilla hacia el final de la Sección 6,

$$r^n = 1 \quad \text{y} \quad n\theta = 0 + 2k\pi,$$

donde k es cualquier entero ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Por tanto, $r = 1$ y $\theta = 2k\pi/n$; y se deduce que los números complejos

$$z = \exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

son raíces n-ésimas de la unidad. Tal como aparecen aquí, en forma exponencial, se ve inmediatamente que están en el círculo unidad centrado en el origen y están uniformemente espaciadas sobre él cada $2\pi/n$ radianes. Evidentemente, pues, todas las raíces n-ésimas de la unidad *distintas* entre sí se obtienen escribiendo

$$z = \exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right) = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \qquad [5]$$

y no se obtienen ya nuevas raíces con otros valores de k.

Así que el número de raíces n-ésimas de la unidad es n. Cuando $n = 2$, esas raíces son, claro está, ± 1. Cuando $n \geqq 3$, corresponden a puntos situados en los vértices de un polígono regular de n lados. Este polígono está inscrito en el círculo unidad centrado en el origen y tiene un vértice en el punto correspondiente a la raíz $z = 1$ ($k = 0$). Si escribimos

$$\omega_n = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right) \qquad [6]$$

y entonces observamos que, de acuerdo con la propiedad [2],

$$\omega_n^k = \exp\left(i\frac{2k\pi}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

vemos que las distintas raíces n-ésimas de la unidad son simplemente

$$1, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n-1}.$$

Nótese que $\omega_n^n = 1$. Véase Figura 9 para la interpretación de las tres raíces cúbicas de la unidad como vértices de un triángulo equilátero. La Figura 10 ilustra el caso $n = 6$.

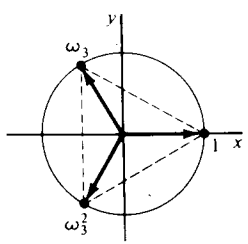


Figura 9

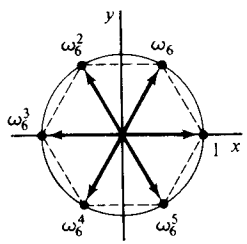


Figura 10

El método anterior puede usarse para hallar las raíces n-ésimas de cualquier número complejo no nulo $z_0 = r_0 \exp(i\theta_0)$. Tales raíces, que se obtienen resolviendo la ecuación

$$z^n = z_0 \qquad [7]$$

en z, son los números

$$c_k = \sqrt[n]{r_0} \exp\left[i\left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \qquad (k = 0, 1, ..., n-1), \qquad [8]$$

donde $\sqrt[n]{r_0}$ denota la raíz n-ésima *positiva* de r_0. El número $\sqrt[n]{r_0}$ es la longitud de cada radio vector representante de las n raíces. Un argumento de la primera raíz c_0 es θ_0/n, y los de las otras raíces se obtienen sumando múltiplos enteros de $2\pi/n$. Por consiguiente, al igual que ocurría con las raíces n-ésimas de la unidad, las raíces para $n = 2$ están siempre en extremos opuestos de un diámetro de un círculo, siendo una de ellas la negativa de la otra; y cuando $n \geqq 3$, están en los vértices de un polígono regular de n lados inscrito en el círculo de radio $\sqrt{r_0}$ centrado en el origen.

Si c es cualquier raíz n-ésima particular de z_0, el conjunto de todas las raíces n-ésimas se puede expresar

$$c, c\omega_n, c\omega_n^2, ..., c\omega_n^{n-1},$$

donde $\omega_n = \exp(i2\pi/n)$, tal como define la Ecuación [6]. Esto es así porque el producto de cualquier número complejo no nulo por ω_n corresponde a aumentar su argumento en $2\pi/n$.

Denotaremos por $z_0^{1/n}$ el conjunto de raíces n-ésimas de un número complejo no nulo z_0. En particular, si z_0 es un número real positivo r_0, el símbolo $r_0^{1/n}$ denota un conjunto de raíces, y el símbolo $\sqrt[n]{r_0}$ en la expresión [8] se reserva para la raíz positiva. Cuando el valor de θ_0 que se usa en [8] es el valor principal de arg z_0 ($-\pi < \theta_0 \leqq \pi$), el número c_0 se suele llamar la raíz *n-ésima principal* de z_0. Así pues, cuando z_0 es un número real positivo, su raíz principal es $\sqrt[n]{r_0}$.

Finalmente, una forma conveniente de recordar la expresión [8] consiste en escribir z_0 en su forma exponencial más general (véase Sec. 6),

$$z_0 = r_0 \exp[i(\theta_0 + 2k\pi)] \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...), \qquad [9]$$

y aplicar formalmente las leyes de los exponentes racionales por los números reales, teniendo en cuenta que hay exactamente n raíces diferentes:

$$z_0^{1/n} = \sqrt[n]{r_0} \exp\frac{i(\theta_0 + 2k\pi)}{n} \qquad (k = 0, 1, 2, ..., n-1) \qquad [10]$$

Ejemplo 2. Hallemos todos los valores de $(-8i)^{1/3}$, o sea, las tres raíces cúbicas de $-8i$. Basta escribir

$$-8i = 8 \exp\left[i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right] \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

para ver que las raíces buscadas son

$$c_k = 2 \exp\left[i\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right] \qquad (k = 0, 1, 2).$$

En coordenadas rectangulares, pues,

$$c_0 = 2 \exp\left[i\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} - i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i;$$

y, análogamente, encontramos que $c_1 = 2i$ y $c_2 = -\sqrt{3} - i$. Estas raíces están en los vértices de un triángulo equilátero inscrito en el círculo de radio 2 centrado en el origen (Fig. 11). La raíz principal es $c_0 = \sqrt{3} - i$.

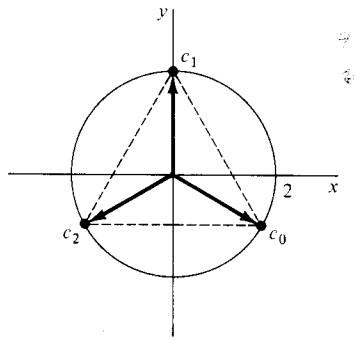


Figura 11

EJERCICIOS

1. Hallar un valor de arg z para

a) $z = \dfrac{-2}{1 + \sqrt{3}i}$; *b)* $z = \dfrac{i}{-2 - 2i}$; *c)* $z = (\sqrt{3} - i)^6$.

Sol. *a)* $2\pi/3$; *c)* π.

2. Expresando los factores individuales de la izquierda en forma exponencial, efectuar las operaciones requeridas, y cambiar finalmente a coordenadas rectangulares, para probar que

a) $i(1 - \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i) = 2(1 + \sqrt{3}i)$; *b)* $5i/(2 + i) = 1 + 2i$;

c) $(-1 + i)^7 = -8(1 + i)$; *d)* $(1 + \sqrt{3}i)^{-10} = 2^{-11}(-1 \sqrt{3}i)$.

3. Hallar en cada caso todas las raíces en coordenadas rectangulares, dibujarlas en un plano, e indicar cuál es la principal:

a) $(2i)^{1/2}$; *b)* $(1 - \sqrt{3}i)^{1/2}$; *c)* $(-1)^{1/3}$; *d)* $(-16)^{1/4}$; *e)* $8^{1/6}$;

f) $(-8 - 8\sqrt{3}i)^{1/4}$.

Sol. *a)* $\pm(1 + i)$; *b)* $\pm\sqrt{3} - i)/\sqrt{2}$; *d)* $\pm\sqrt{2}(1 + i)$, $\pm\sqrt{2}(1 - i)$;
e) $\pm\sqrt{2}$, $\pm(1 + \sqrt{3}i)/\sqrt{2}$, $\pm(-1 + \sqrt{3}i)/\sqrt{2}$; *f)* $\pm(\sqrt{3} - i)$, $\pm(1 + \sqrt{3}i)$

4. Probar que

a) $|e^{i\theta}| = 1$; *b)* $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; *c)* $(e^{i\theta})^2 = e^{i2\theta}$;

d) $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} \cdots e^{i\theta_n} = e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

5. Resolver la ecuación $|e^{i\theta}| = 2$ para $\theta(0 \leqq \theta < 2\pi)$ y verificar la solución geométricamente.

Sol. π.

6. Usar la fórmula de De Moivre (Sec. 7) para deducir las siguientes identidades trigonométricas:

a) $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta$; *b)* $\operatorname{sen} 3\theta = 3\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta - \operatorname{sen}^3\theta$.

7. De acuerdo con la Sección 3, la diferencia $z - z_0$ de dos números complejos distintos admite interpretación vectorial (véase la Fig. 12, donde θ denota el ángulo de inclinación del vector representante de $z - z_0$). Trasladando el vector de $z - z_0$ de manera que sea un radio vector, probar que los valores de $\arg(\overline{z - z_0})$ son los mismos que los de $-\arg(z - z_0)$. Con el mismo método, demostrar que

$$\operatorname{Arg}(\overline{z - z_0}) = -\operatorname{Arg}(z - z_0)$$

si y sólo si $z - z_0$ no es un número real negativo.

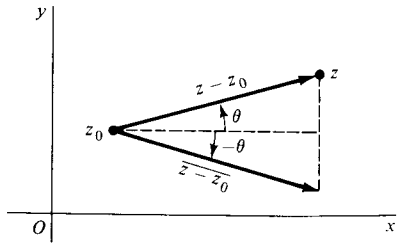


Figura 12

8. Probar que si $\operatorname{Re} z_1 > 0$ y $\operatorname{Re} z_2 > 0$, entonces

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2,$$

donde $\operatorname{Arg}(z_1z_2)$ denota el valor principal de $\arg(z_1z_2)$, etc.

9. Comprobar la afirmación (Sec. 5)

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2.$$

10. Verificar la expresión [1], Sección 7, para z^n cuando $n = 1, 2, \ldots$

11. Obtener la expresión [8], Sección 7, para las raíces n-ésimas de z_0.

12. *a)* Sea a un número real fijo cualquiera. Probar que las dos raíces cuadradas de $a + i$ son $\pm\sqrt{A}\exp(i\alpha/2)$, donde $A = \sqrt{a^2 + 1}$ y $\alpha = \operatorname{Arg}(a + i)$.

b) Usando las identidades trigonométricas

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos\alpha}{2}, \quad \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos\alpha}{2},$$

demostrar que las raíces cuadradas obtenidas en *a)* se pueden escribir

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{A + a} + i\sqrt{A - a}).$$

13. Según la Sección 7, las tres raíces cúbicas de un número complejo no nulo z_0 son c_0, $c_0\omega_3$, $c_0\omega_3^2$, donde c_0 es la raíz cúbica principal de z_0 y

$$\omega_3 = \exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

Probar que si $z_0 = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$, entonces $c_0 = \sqrt{2}(1 + i)$ y las otras dos raíces son, en forma rectangular, los números

$$c_0\omega_3 = \frac{-(\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i}{\sqrt{2}}, \qquad c_0\omega_3^2 = \frac{(\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} + 1)i}{\sqrt{2}}.$$

14. Hallar las cuatro raíces de la ecuación $z^4 + 4 = 0$, y usarlas para factorizar $z^4 + 4$ en factores cuadráticos con coeficientes reales.

Sol. $(z^2 + 2z + 2)(z^2 - 2z + 2)$.

15. Sabiendo que $z_1z_2 \neq 0$, usar la forma exponencial de z_1 y z_2 para demostrar que si y sólo si

$$\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2) = |z_1||z_2|$$

si y sólo si $\theta_1 - \theta_2 = 2n\pi$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$, donde $\theta_1 = \arg z_1$ y $\theta_2 = \arg z_2$.

16. Supuesto que $z_1z_2 \neq 0$, y recurriendo al resultado del Ejercicio 15, modificar la derivación de la desigualdad triangular [1], Sección 4, para probar que

a) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$; *b)* $|z_1 - z_2| = ||z_1| - |z_2||$;

si y sólo si $\theta_1 - \theta_2 = 2n\pi$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$, donde $\theta_1 = \arg z_1$ y $\theta_2 = \arg z_2$. Interpretar estas relaciones geométricamente.

17. Sea z un número complejo no nulo y n un entero negativo ($n = -1, -2, \ldots$). Escribamos además $z = re^{i\theta}$ y $m = -n = 1, 2, \ldots$

a) Usando $z^m = r^m e^{im\theta}$ y $z^{-1} = (1/r)e^{i(-\theta)}$, comprobar que $(z^m)^{-1} = (z^{-1})^m$ en la Sección 7, podría haberse escrito alternativamente como $z^n = (z^m)^{-1}$.

b) Definiendo $z^{1/n}$ mediante $z^{1/n} = (z^{-1})^{1/m}$ y probando que los m valores de $(z^{1/m})^{-1}$ y $(z^{-1})^{1/m}$ son los mismos, verificar que $z^{1/n} = (z^{1/m})^{-1}$.

18. Establecer la identidad

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \qquad (z \neq 1),$$

y usarla para deducir la *identidad trigonométrica de Lagrange:*

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin[(2n+1)\theta/2]}{2\sin(\theta/2)} \qquad (0 < \theta < 2\pi).$$

Sugerencia: En cuanto a la primera identidad, escribir $S = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n$ y considerar la diferencia $S - zS$. Para deducir la segunda, escribir $z = e^{i\theta}$ en la primera.

19. Probar que si c es cualquier raíz n-ésima de la unidad distinta de la unidad, entonces

$$1 + c + c^2 + \cdots + c^{n-1} = 0.$$

Sugerencia: Utilizar la primera identidad del Ejercicio 18.

20. *a*) Probar que la fórmula cuadrática usual resuelve la ecuación cuadrática

$$az^2 + bz + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

cuando los coeficientes a, b y c son números complejos. En concreto, completando el cuadrado del lado izquierdo, demostrar que las raíces de esa ecuación son

$$z = \frac{-b + (b^2 - 4ac)^{1/2}}{2a},$$

donde se han considerado las dos raíces cuadradas cuando $b^2 - 4ac \neq 0$.

b) Usando *a*) hallar las raíces de la ecuación

$$z^2 + 2z + (1 - i) = 0.$$

Sol. *b*) $\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{i}{\sqrt{2}}, \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{i}{\sqrt{2}}.$

21. Probar que dos números complejos z_1 y z_2 tienen igual módulo si y sólo si existen números complejos c_1 y c_2 tales que $z_1 = c_1 c_2$ y $z_2 = c_1 \bar{c}_2$.

8. REGIONES EN EL PLANO COMPLEJO

En esta sección estaremos interesados en conjuntos de números complejos, o sea, de puntos en el plano, y su proximidad mutua. Nuestro instrumento esencial será el concepto de ε *entorno*

$$|z - z_0| < \varepsilon \qquad [1]$$

de un punto dado z_0. Consta de todos los puntos z que son interiores (sin estar sobre él) al círculo centrado en z_0 con radio prefijado (Fig. 13). Cuando el valor de ε queda sobreentendido o es irrelevante en la discusión, el conjunto [1] se citará como un entorno, simplemente. En ocasiones, conviene hablar de un *entorno punteado*

$$0 < |z - z_0| < \varepsilon, \qquad [2]$$

que consta de todos los puntos z de un ε entorno, excepto el propio z_0.

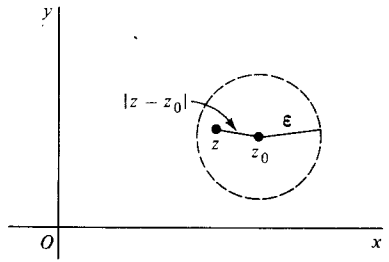


Figura 13

Se dice que un punto z_0 es un *punto interior* de un conjunto S siempre que exista algún entorno de z_0 cuyos puntos sean todos de S; se llamará un *punto exterior* de S cuando exista un entorno suyo que no contenga puntos de S. Si z_0 no es de ninguno de esos dos tipos, se llama un *punto frontera* de S. Un punto frontera es, por tanto, uno cuyos entornos contienen todos tanto puntos de S como puntos que no están en S. La totalidad de esos puntos frontera se llama la *frontera* de S. El círculo $|z| = 1$, por ejemplo, en la frontera de los conjuntos

$$|z| < 1 \quad \text{y} \quad |z| \leqq 1. \qquad [3]$$

Un conjunto es *abierto* si no contiene a ninguno de sus puntos frontera. Dejamos como ejercicio probar que un conjunto es abierto si y sólo si todos sus puntos son interiores. Un conjunto es *cerrado* si contiene a todos sus puntos frontera, y el *cierre* (o clausura) $\bar{S}$ de un conjunto S es el conjunto cerrado que consta de S y de todos sus puntos frontera. Nótese que el primero de los conjuntos [3] es abierto y que el segundo es el cierre de ambos.

Claro está que algunos conjuntos no son ni abiertos ni cerrados. Para que un conjunto no sea abierto, ha de contener alguno de sus puntos frontera; y para no ser cerrado, debe haber algún punto frontera que no esté en él. Observemos que

el disco punteado $0 < |z| \leqq 1$ no es ni abierto ni cerrado. El conjunto de los números complejos es, por otra parte, abierto y cerrado a la vez, puesto que no tiene puntos frontera.

Un conjunto abierto S es *conexo* si cada par de puntos z_1 y z_2 en él se puede unir por una línea poligonal, consistente en un número finito de segmentos sucesivos, que está por entero contenida en S. El conjunto abierto $|z| < 1$ es conexo. El anillo $1 < |z| < 2$ es, claro está, abierto y también conexo (véase Figura 14). Un conjunto abierto y conexo se llama un *dominio*. Nótese que todo entorno es un dominio. Un dominio junto con algunos, ninguno, o todos sus puntos frontera, se llama una *región*.

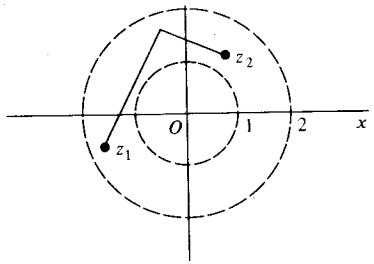


Figura 14

Un conjunto S es *acotado* si todo punto de S está dentro de algún círculo $|z| = R$; en caso contrario, es *no acotado*. Ambos conjuntos [3] son regiones acotadas.

Un punto z_0 se dice que es un *punto de acumulación* de un conjunto S si cada entorno punteado de z_0 contiene al menos un punto de S. Se sigue que si S es cerrado, entonces contiene a todos sus puntos de acumulación. Porque si un punto de acumulación z_0 no estuviese en S, sería un punto frontera de S, lo cual contradice el hecho de que un conjunto cerrado contiene todos sus puntos frontera. Dejamos como ejercicio probar que el recíproco es también cierto. Así pues, un conjunto es cerrado si y sólo si contiene a todos sus puntos de acumulación.

Evidentemente, un punto z_0 *no* es punto de acumulación de un conjunto S siempre que exista un entorno punteado de z_0 que no contenga puntos de S. Nótese que el origen es el único punto de acumulación del conjunto $z_n = i/n$ $(n = 1, 2, ...)$.

EJERCICIOS

1. Representar los siguientes conjuntos y determinar cuáles de ellos son dominios:

a) $|z - 2 + i| \leqq 1$; *b)* $|2z + 3| > 4$; *c)* $\text{Im } z > 1$; *d)* $\text{Im } z = 1$;
e) $0 \leqq \arg z \leqq \pi/4$ $(z \neq 0)$; *f)* $|z - 4| \geqq |z|$.

Sol. *b)*, *c)* son dominios.

2. ¿Qué conjunto del Ejercicio 1 no es ni abierto ni cerrado?

Sol. *e)*.

3. ¿Cuáles de los conjuntos del Ejercicio 1 son acotados?

Sol. *a)*, *g)*.

4. Determinar en cada caso el cierre del conjunto:

a) $-\pi < \arg z < \pi$ $(z \neq 0)$; *b)* $|\text{Re } z| < |z|$; *c)* $\text{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \leqq \frac{1}{2}$;

d) $\text{Re}(z^2) > 0$.

5. Sea S el abierto que consta de los puntos z tales que $|z| < 1$ o $|z - 2| < 1$. ¿Es abierto?

6. Probar que un conjunto S es abierto si y sólo si todos su puntos son interiores.

7. Hallar los puntos de acumulación de los siguientes conjuntos:

a) $z_n = i^n (n = 1, 2, ...)$; *b)* $z_n = i^n/n (n = 1, 2, ...)$;
c) $0 \leqq \arg z < \pi/2$ $(z \neq 0)$; *d)* $z_n = (-1)^n(1 + i)(n - 1)/(n = 1, 2, ...)$.

Sol. *a)* Ninguno; *b)* 0; *d)* $\pm(1 + i)$.

8. Demostrar que si un conjunto contiene todos sus puntos de acumulación, es cerrado.

9. Probar que cualquier punto de un dominio es punto de acumulación de ese dominio.

10. Probar que un conjunto finito de puntos $z_1, z_2, ..., z_n$ no puede tener puntos de acumulación.

CAPITULO

DOS

FUNCIONES ANALITICAS

Consideraremos ahora funciones de una variable compleja y desarrollaremos para ellas una teoría de derivación. El objetivo fundamental de este capítulo es introducir las funciones analíticas, que juegan un papel central en el análisis complejo.

9. FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA

Sea S un conjunto de números complejos. Una *función* f definida sobre S es una regla que asigna a cada z en S un número complejo w. El número w se llama el *valor* de f en z y se denota por $f(z)$; esto es,

$$w = f(z).$$

El conjunto S se llama el *dominio de definición* de f*.

No siempre es conveniente usar diferente notación para distinguir entre una función dada y sus valores. Así, si f está definida sobre el semiplano Re $z > 0$ mediante la ecuación $w = 1/z$, se puede citar como la función $w = 1/z$, o simplemente como la función $1/z$, donde Re $z > 0$.

Hay que hacer constar que para definir una función es necesario dar tanto una regla de asignación como un dominio de definición. Si no se menciona el dominio de definición, sobreentendemos que se toma el mayor conjunto posible. Así pues, si hablamos sólo de la función $1/z$, el dominio de definición ha de entenderse implícitamente como el conjunto de todos los puntos del plano, excepto el origen.

Supongamos que $w = u + iv$ es el valor de una función f en $z = x + iy$; es decir,

$$u + iv = f(x + iy).$$

* El dominio de definición no tiene por qué ser necesariamente un dominio en el sentido de la Sección 8, aunque suele serlo.

Cada número real u y v depende de las variables reales x e y, luego $f(z)$ puede ser expresado en términos de un par de función con valores reales de las variables reales x e y:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y). \qquad [1]$$

Ejemplo 1. Si $f(z) = z^2$, entonces

$$f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy.$$

Luego

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{y} \quad v(x, y) = 2xy.$$

Si se usan coordenadas polares r y θ, en vez de x e y, entonces

$$u + iv = f(re^{i\theta}),$$

donde $w = u + iv$ y $z = re^{i\theta}$. En este caso podemos escribir

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta). \qquad [2]$$

Ejemplo 2. Consideremos la función

$$f(z) = z + \frac{1}{z} \qquad (z \neq 0).$$

Escribiendo

$$f(re^{i\theta}) = re^{i\theta} + \frac{1}{re^{i\theta}} = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) + \frac{1}{r}(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta) =$$

$$= \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta + i\left(r - \frac{1}{r}\right)\operatorname{sen}\theta,$$

vemos que

$$u(r, \theta) = \left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta \quad \text{y} \quad v(r, \theta) = \left(r - \frac{1}{r}\right) sen\ \theta.$$

Si en cualquiera de las Ecuaciones [1] o [2], la función v es siempre cero, entonces el número $f(z)$ es siempre real. Un ejemplo de tales *funciones de una variable compleja con valores reales* es

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 + i0.$$

Si n es cero o un entero positivo, y si $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes complejas, donde $a_n \neq 0$, la función

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \qquad (a_n \neq 0)$$

es un *polinomio* de grano n. Nótese que aquí la suma tiene un número finito de términos y el dominio de definición es todo el plano complejo. Los cocientes de polinomios, $P(z)/Q(z)$, se llaman *funciones racionales*, y están definidas en todo punto z excepto en los que hacen $Q(z) = 0$. Los polinomios y las funciones racionales constituyen clases elementales, pero muy importantes, de funciones de una variable compleja.

Una generalización del concepto de función es una regla que asigna más de un valor a un punto z de su dominio de definición. Estas *funciones multivaluadas* aparecen en la teoría de funciones de una variable compleja, igual que en el caso de variables reales. Cuando se estudian funciones multivaluadas, se suele tomar sólo uno de los valores asignados a cada punto, de modo sistemático, y se construye así una función (univaluada) a partir de la función multivaluada.

Ejemplo 3. Si z es un número complejo no nulo $z = re^{i\theta}$, sabemos por la Sección 7 que $z^{1/2}$ tiene los dos valores $z^{1/2} = \pm\sqrt{r}\, e^{i\theta/2}$, donde θ es el valor principal $(-\pi < \theta \leq \pi)$ de arg z. Pero si escogemos sólo el valor positivo de $\pm\sqrt{r}$ y hacemos

$$f(z) = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2} \qquad (r > 0,\ -\pi < \theta < \pi),$$

vemos que esta función (univaluada) está bien definida en el dominio indicado. Puesto que cero es la única raíz cuadrada de cero, escribiremos también $f(0) = 0$. La función f está, por tanto, bien definida sobre todo el plano complejo salvo en la semirrecta radial $\theta = \pi$, que es el eje real negativo.

10. APLICACIONES

Las propiedades de una función real de una variable real se suelen reflejar en el gráfico de la función. Pero para $w = f(z)$, donde z y w son complejos, no disponemos de tal gráfica, pues ambos números, z y w, están sobre un plano en lugar de sobre una recta. Uno puede, sin embargo, exhibir cierta información de la función indicando pares de puntos correspondientes (x, y) y $w = (u, v)$, para lo cual es, en general, más sencillo dibujar los planos z y w separadamente.

Al pensar en una función f de esta manera, nos referimos a ella como *aplicación* o transformación. La *imagen* de un punto z del dominio de definición S es el punto $w = f(z)$, y el conjunto de imágenes de los puntos de un conjunto T se llama la imagen de T. La imagen del dominio de definición completo de f se llama *recorrido* de f. La *preimagen* (o *imagen inversa*) de un punto w es el conjunto de puntos z del dominio de definición de f que tienen a w por imagen.

La imagen inversa de un punto puede contener un solo punto, muchos puntos o ningún punto. Esto último sucede cuando w no está en el recorrido de f.

Se utilizan términos tales como *traslación*, *rotación* y *reflexión* para referirse a características geométricas dominantes de ciertas aplicaciones. En tales casos, suele resultar conveniente considerar los planos z y w como coincidentes. Por ejemplo, como

$$z + 1 = (x + 1) + iy,$$

la aplicación $w = z + 1$ puede verse como una traslación de cada punto z a una posición situada una unidad más a la derecha. La aplicación $w = iz$ gira cada punto no nulo z en sentido contrario al de las agujas de un reloj un ángulo recto en torno al origen (Sec. 5), y $w = \bar{z}$ transforma cada punto z en su reflejado respecto del eje real (Sec. 3).

Se suele obtener más información exhibiendo imágenes de curvas y regiones que indicando simplemente pares de puntos individuales correspondientes. En los ejemplos que siguen examinaremos algunas propiedades de las aplicaciones dadas por las funciones de los Ejemplos 1 a 3 de la Sección 9. La interpretación geométrica de una función como aplicación se desarrollará más detalladamente en el Capítulo 7.

Ejemplo 1. Según el Ejemplo 1, Sección 9, la aplicación $w = z^2$ puede verse como la transformación

$$u = x^2 - y^2, \qquad v = 2xy \qquad [1]$$

del plano xy en el plano uv. Vamos a usar las Ecuaciones [1] para probar que la imagen de la franja vertical $0 \leq x \leq 1$, $y \geq 0$, que se muestra en la Figura 15, es la región semiparabólica cerrada que allí se indica.

Cuando $0 < x_1 < 1$, el punto (x_1, y_1) se mueve por una recta vertical, denotada por L_1 en la Figura 15, al crecer y desde $y = 0$. De acuerdo con las Ecuaciones [1], la imagen en el plano uv tiene la representación paramétrica

$$u = x_1^2 - y^2, \quad v = 2x_1 y \qquad (0 \leq y < \infty). \qquad [2]$$

Usando la segunda de esas ecuaciones para sustituir y en la primera, vemos que los puntos imagen (u, v) deben estar en la parábola

$$v^2 = -4x_1^2(u - x_1^2), \qquad [3]$$

con vértice en $(x_1^2, 0)$ y foco en el origen. Como v crece con y desde $v = 0$, según la segunda Ecuación [2], vemos también que mientras el punto (x_1, y) sube por la recta L_1 a partir del eje x, su imagen sube por la mitad superior L_1' de la parábola a partir del eje u. Además, cuando tomamos un número x_2 mayor que x_1, la correspondiente semirrecta L_1 tiene una imagen L_1' que es una parábola a la derecha de L_1', como indica la Figura 15. Notemos, de hecho, que la imagen de la

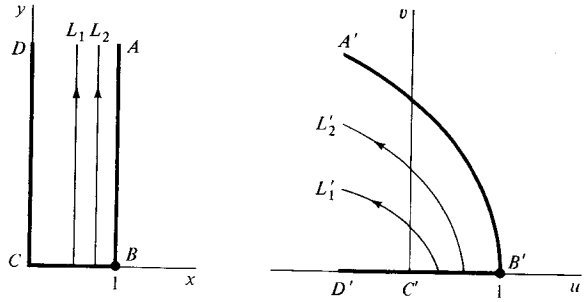


Figura 15. $w = z^2$.

semirrecta BA en esa figura es la mitad superior de la parábola $v^2 = -4(u - 1)$, denotada $B'A'$.

La imagen de la semirrecta CD se halla observando de las Ecuaciones [1] que un punto típico $(0, y)$, donde $y \geqq 0$, sobre CD se transforma en el punto $(-y^2, 0)$ en el plano uv. Luego al subir un punto por CD, su imagen se mueve hacia la izquierda a partir del origen a lo largo del eje u. Es evidente, pues, que al desplazar las semirrectas verticales en el plano xy hacia la izquierda, sus arcos parabólicos imagen en el plano uv van reclinándose hasta coincidir con la semirrecta $C'D'$.

Ahora ya es claro que las imágenes de todas las semirrectas entre CD y BA (ellas incluidas) llenan la región semiparabólica cerrada limitada por $A'B'C'D'$. Asimismo, todo punto de esa región es imagen de un único punto de la franja cerrada limitada por $ABCD$. Por tanto, podemos concluir que la región semiparabólica es la imagen de la franja y que hay una correspondencia uno a uno entre los puntos de esas dos regiones cerradas. (Comparar con la Fig. 3 del Apéndice 2, donde la franja tiene anchura arbitraria.)

Ejemplo 2. Volvamos a considerar la función $z + (1/z)$ del Ejemplo 2, Sección 9, como transformación $w = z + (1/z)$. Concretamente, vamos a probar que la imagen del dominio consistente en todos los puntos del semiplano superior $y > 0$ que son exteriores al círculo $|z| = 1$, es el semiplano superior $v > 0$, y que la imagen de la frontera del dominio es el eje u.

Empezamos comprobando que la frontera cumple lo que acabamos de decir, con los puntos correspondientes indicados en la Figura 16. La imagen de un

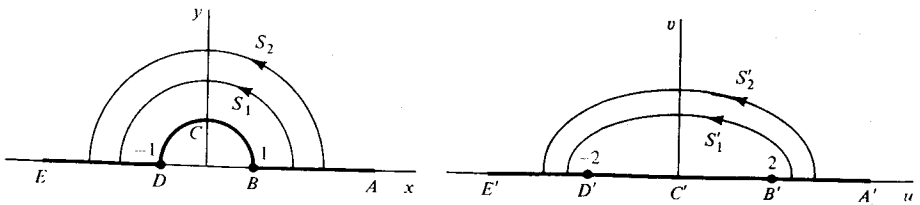


Figura 16. $w = z + \dfrac{1}{z}$.

punto $z = x(x \geqq 1)$ sobre el eje x es el punto $w = x + (1/x)$. El punto imagen representa un número real en el plano w; y como la derivada de la función $x + (1/x)$ es siempre positiva cuando $x > 1$, el valor de w crece al crecer x desde $x = 1$. Luego al desplazarse el punto $z = x(x \geqq 1)$ por el eje x hacia la derecha, su imagen se mueve hacia la derecha por el eje u, partiendo del punto $w = 2$. Análogamente, si $z = -x(x \geqq 1)$ y z se mueve hacia la izquierda desde el punto $z = -1$ por el eje x, el punto imagen $w = -[x + (1/x)]$ se mueve hacia la izquierda por el eje u, esta vez a partir del punto $w = -2$.

Para ver que la imagen de la mitad superior del círculo $|z| = 1$ es el segmento $-2 \leqq u \leqq 2$ del eje u, nótese que la imagen de un punto típico $z = e^{i\theta}(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ sobre el semicírculo es

$$w = e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta.$$

Al crecer θ desde $\theta = 0$ a $\theta = \pi$, el punto $z = e^{i\theta}$ recorre la mitad del círculo en sentido contrario al de las agujas de un reloj, y su imagen $w = 2 \cos \theta$ se mueve hacia la izquierda por el eje u desde $w = 2$ a $w = -2$.

Ahora mostraremos que los puntos que están por encima de la frontera en el plano z corresponden a puntos por encima de la frontera en el plano w. Del Ejemplo 2 en la Sección 9 sabemos que la imagen (u, v) de un punto $z = r_1 e^{i\theta}(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ sobre la mitad superior S_1 (Fig. 16) de un círculo $|z| = r_1 (r_1 > 1)$ viene dada por las ecuaciones

$$u = a \cos \theta, \qquad v = b \operatorname{sen} \theta, \qquad [4]$$

donde a y b son los números positivos

$$a = r_1 + \frac{1}{r_1}, \quad b = r_1 - \frac{1}{r_1}.$$

Las coordenadas [4] están ligadas por la ecuación

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1,$$

que representa una elipse con focos en los puntos $w = \pm\sqrt{a^2 - b^2} = \pm 2$. Puesto que los valores de $\cos \theta$ decrecen continuamente desde 1 hasta -1 al crecer θ desde 0 hasta π, y como $\operatorname{sen} \theta \geqq 0$ para esos valores de θ, se deduce de [4] que el punto imagen w se mueve hacia la izquierda sobre la mitad superior S_1' de la elipse cuando z recorre el semicírculo S_1 de derecha a izquierda.

Si se toma un radio r_2 mayor que r_1, la mitad superior del círculo $|z| = r_2$ y su imagen S_2' son ambas mayores, como indica la Figura 16. En efecto, al crecer los semicírculos en tamaño, sus imágenes, que son las mitades superiores de las elipses con focos en $w = \pm 2$, llenan todo el semiplano superior $v > 0$. Si imaginamos los semicírculos contrayéndose hacia la parte circular de la frontera,

las semielipses tienden a convertirse en el segmento $-2 \leqq u \leqq 2$ del eje u. Como cualquier punto dado w por encima del eje u está sobre una y sólo una de las semielipses, debe ser imagen de exactamente un punto del dominio en el plano z. Esto completa la verificación propuesta, que ilustra la Figura 17 del Apéndice 2.

Ejemplo 3. Finalmente, usamos la función del Ejemplo 3, Sección 9, para definir la aplicación

$$w = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2} \qquad (r > 0,\ -\pi < \theta < \pi),$$

donde se entiende que $w = 0$ para $z = 0$. La transformación divide los argumentos por dos, lo que se ilustra mostrando que la imagen del cuadrante de disco $0 \leqq r \leqq 2, 0 \leqq \theta \leqq \pi/2$ en el plano z es el sector $0 \leqq \rho \leqq \sqrt{2}, 0 \leqq \phi \leqq \pi/4$ en el plano w (Fig. 17), donde hemos usado coordenadas polares ρ y ϕ.

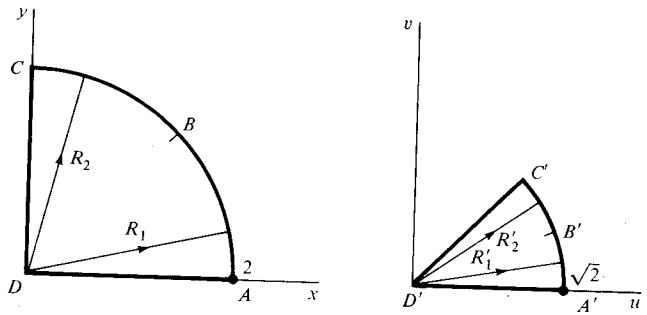


Figura 17. $w = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}$ $(r > 0,\ -\pi < \theta < \pi)$.

Para ello, observemos que cuando un punto $z = r \exp(i\theta_1)(0 \leqq \theta_1 \leqq \pi/2)$ se aleja del origen a lo largo de un radio R_1 de longitud 2 y con ángulo de inclinación θ_1, su imagen $w = \sqrt{r} \exp(i\theta_1/2)$ se aleja del origen en el plano w a lo largo del radio R_1' de longitud $\sqrt{2}$ y ángulo de inclinación $\theta_1/2$. Véase la Figura 17, donde se muestran también otro radio R_2 y su imagen R_2'. Ahora es claro de la figura que si imaginamos la región del plano z como barrida por un radio que empieza en DA y termina en DC, entonces la región del plano w es barrida por el radio correspondiente, comenzando en $D'A'$ y terminando en $D'C'$. Esto establece una correspondencia uno a uno entre los puntos de las dos regiones.

EJERCICIOS

1. Para cada una de estas funciones, describir su dominio de definición:

a) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 1}$; *b)* $f(z) = \operatorname{Arg}\left(\dfrac{1}{z}\right)$; *c)* $f(z) = \dfrac{z}{z + \bar{z}}$;

d) $f(z) = \dfrac{1}{1 - |z|^2}$.

Sol. *a)* $z \neq \pm i$; *c)* Re $z \neq 0$.

2. Expresar $f(z) = z^3 + z + 1$ en la forma $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

3. Sea $f(z) = x^2 - y^2 - 2y + i(2x - 2xy)$, donde $z = x + iy$. Usar que

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

para expresar $f(z)$ en términos de z, y simplificar el resultado.

Sol. $\bar{z}^2 + 2iz$.

4. Dibujar la región sobre la que se aplica el sector $r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq \pi/4$ bajo la transformación *a)* $w = z^2$; *b)* $w = z^3$; *c)* $w = z^4$.

5. Explicar cómo se sigue de la discusión del Ejemplo 1, Sección 10, que la transformación $w = z^2$ aplica una franja vertical $0 \leqq x \leqq c$, $y \geqq 0$ de anchura arbitraria sobre una región semiparabólica cerrada, como muestra la Figura 3 del Apéndice 2.

6. Modificar la discusión del Ejemplo 1, Sección 10, para probar que si $w = z^2$, la imagen de la región triangular cerrada formada por las rectas $y = \pm x$ y $x = 1$ es la región parabólica cerrada acotada por la izquierda por el segmento $-2 \leqq v \leqq 2$ del eje v y por la derecha por una porción de la parábola $v^2 = -4(u - 1)$. Verificar los puntos correspondientes que se indican en la Fig. 18.

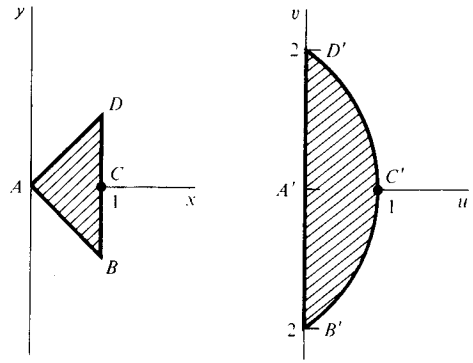


Figura 18. $w = z^2$.

7. Modificando la discusión del Ejemplo 2, Sección 10, probar que la transformación $w = z + (1/z)$ aplica el círculo $|z| = 1$ sobre el segmento $-2 \leqq u \leqq 2$ del eje u, y el dominio exterior a ese círculo en el resto del plano w.

8. Modificar la discusión del Ejemplo 2, Sección 10, para comprobar que la transformación $w = z + (1/z)$ aplica

a) el anillo semicircular de la Figura 18, Apéndice 2, tal como allí se indica;

b) la mitad superior del disco $|z| \leqq 1$ sobre la mitad inferior del plano w, como muestra la Figura 16 del Apéndice 2.

9. Considerar imágenes de arcos circulares, en vez de rayos, para dar una demostración alternativa de la aplicación establecida en el Ejemplo 3, Sección 10.

10. Otra interpretación de una función $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es como *campo de vectores* en el dominio de definición de f. La función asigna un vector w, con componentes $u(x, y)$ y $v(x, y)$ a cada punto z en el que está definida. Indicar gráficamente el campo vectorial representado por la ecuaciones *a*) $w = iz$; *b*) $w = z/|z|$.

11. LIMITES

Sea una función definida en todos los puntos z de un entorno punteado (Sec. 8) de z_0. La afirmación de que el *límite* de $f(z)$, cuando z tiende a z_0, es un número w_0, o sea

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0, \qquad [1]$$

significa que el punto $w = f(z)$ puede hacerse tan próximo como se quiera al w_0 si escogemos el punto z suficientemente cercano al z_0, pero distinto de él. Ahora expresaremos la definición de límite en forma precisa y práctica.

La afirmación [1] significa que, para cada número positivo ε, existe un número positivo δ tal que

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta. \qquad [2]$$

Geométricamente, esta definición dice que para cada ε entorno $|w - w_0| < \varepsilon$ de w_0, existe un δ entorno punteado $0 < |z - z_0| < \delta$ de z_0 tal que todo punto z en él tiene una imagen w que está en el ε entorno (Fig. 19). Puesto que la condición [2] se aplica a *todos* los puntos del entorno punteado, el símbolo $z \to z_0$ en [1] implica que se permite que z tienda hacia z_0 de forma arbitraria, no sólo por una dirección particular. Nótese, no obstante, que aunque todos los puntos en el entorno punteado $0 < |z - z_0| < \delta$ han de tomarse en consideración, sus imágenes no tienen por qué llenar todo el entorno $|w - w_0| < \varepsilon$. Si f tiene, por ejemplo, el valor constante w_0, la imagen de z es siempre el centro de ese entorno. Obsérvese también que una vez hallado un δ, se puede sustituir por cualquier número positivo más pequeño, por ejemplo $\delta/2$.

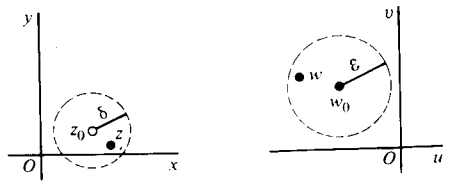


Figura 19

La definición [2] exige que f esté definida en todos los puntos de un entorno punteado de z_0. Tal entorno punteado, claro está, existe siempre si z_0 es un punto interior de una región en que f esté definida. Podemos extender esta definición de límite al caso en que z_0 sea un punto frontera de esa región, adoptando el convenio de que la primera de las desigualdades [2] sólo han de satisfacerla los puntos z que estén *a la vez* en la región y en el dominio $0 < |z - z_0| < \delta$.

Si bien la definición [2] proporciona un medio para comprobar si un punto dado w_0 es un límite, no pone en nuestras manos un método para determinar ese límite. Los teoremas sobre límites que presentaremos en la próxima sección permitirán calcular muchos límites.

Ejemplo 1. Probemos que $f(z) = iz/2$ en el disco abierto $|z| < 1$, entonces

$$\lim_{z \to 1} f(z) = \frac{i}{2},$$

donde el punto $z = 1$ está en la frontera del dominio de definición. Nótese que cuando z está en la región $|z| < 1$,

$$\left| f(z) - \frac{i}{2} \right| = \left| \frac{iz}{2} - \frac{i}{2} \right| = \frac{|z - 1|}{2}.$$

Por consiguiente, para toda tal z y todo número positivo ε,

$$\left| f(z) - \frac{i}{2} \right| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - 1| < 2\varepsilon.$$

Así que la condición [2] es satisfecha por los puntos de la región $|z| < 1$ cuando δ es igual a 2ε (Fig. 20) o cualquier número positivo menor.

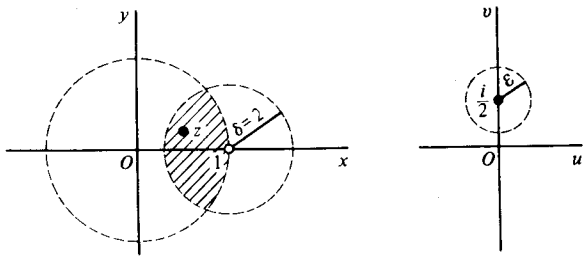


Figura 20

Ejemplo 2. Para ilustrar mejor la definición [2], demostraremos ahora que

$$\lim_{z \to 2i} (2x + iy^2) = 4i \qquad (z = x + iy). \qquad [3]$$

Para cada número positivo ε, hemos de encontrar un número positivo δ tal que

$$|2x + iy^2 - 4i| < \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |z - 2i| < \delta. \qquad [4]$$

Para ello, escribimos

$$|2x + iy^2 - 4i| \leqq 2|x| + |y^2 - 4| = 2|x| + |y - 2||y + 2|$$

y concluimos que la primera de las desigualdades [4] se cumplirá si

$$2|x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |y - 2||y + 2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

La primera de ellas es satisfecha, por supuesto, cuando $|x| < \varepsilon/4$. Para ver qué y satisfacen la segunda, nos restringimos a las y tales que $|y - 2| < 1$ y entonces observamos que

$$|y + 2| = |(y - 2) + 4| \leqq |y - 2| + 4 < 5.$$

Por tanto, si $|y - 2| < \min\{\varepsilon/10, 1\}$, donde $\min\{\varepsilon/10, 1\}$ denota el menor de los números $\varepsilon/10$ y 1, se sigue que

$$|y - 2||y + 2| < \left(\frac{\varepsilon}{10}\right)5 = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Un valor adecuado de δ se encuentra ahora con facilidad (Fig. 21) a partir de las condiciones de que $|x|$ sea menor que $\varepsilon/4$ y que $|y - 2|$ menor que $\min\{\varepsilon/10, 1\}$:

$$\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{10}, 1\right\}.$$

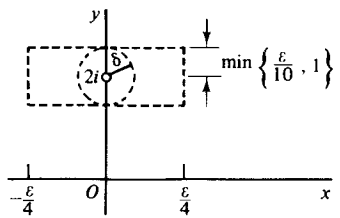


Figura 21

Al introducir la noción de límite en el primer párrafo de esta sección, supusimos tácitamente que cuando un límite de una función $f(z)$ existe en un punto z_0, es único. En efecto, así es. Porque supongamos que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \quad \text{y} \quad \lim_{z \to z_0} f(z) = w_1.$$

Entonces, para cualquier ε positivo, existen números positivos δ_0 y δ_1 tales que

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_0$$

y

$$|f(z) - w_1| < \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |z - z_0| < \delta_1.$$

De modo que $0 < |z - z_0| < \delta$, donde δ denota el menor de los números δ_0 y δ_1, entonces

$$|[f(z) - w_0] - [f(z) - w_1]| \leqq |f(z) - w_0| + |f(z) - w_1| < 2\varepsilon;$$

o sea, $|w_1 - w_0| < 2\varepsilon$. Pero $w_1 - w_0$ es una constante, y ε puede escogerse arbitrariamente pequeño. Luego $w_1 - w_0 = 0$, o sea, $w_1 = w_0$.

12. TEOREMAS SOBRE LIMITES

Podemos acelerar nuestro estudio de los límites estableciendo una conexión entre los límites de funciones de una variable compleja y los de funciones reales de dos variables reales. Como estos últimos han sido estudiados ya en Cálculo, utilizaremos su definición y sus propiedades con entera libertad.

Teorema 1. *Supongamos que*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \qquad z_0 = x_0 + iy_0, \quad \text{y} \quad w_0 = u_0 + iv_0.$$

Entonces

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \tag{1}$$

si y sólo si

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} u(x, y) = u_0 \quad \text{y} \quad \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} v(x, y) = v_0. \tag{2}$$

Para demostrar el teorema, suponemos primero que la afirmación [1] es cierta y probamos que se siguen las condiciones [2]. De acuerdo con la definición de límite en la Sección 11, para cada número positivo ε existe un número positivo δ tal que

$$|(u - u_0) + i(v - v_0)| < \varepsilon$$

siempre que

$$0 < |(x - x_0) + i(y - y_0)| < \delta.$$

Como

$$|u - u_0| \leqq |(u - u_0) + i(v - v_0)|$$

y

$$|v - v_0| \leqq |(u - u_0) + i(v - v_0)|,$$

se sigue que

$$|u - u_0| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |v - v_0| < \varepsilon$$

si

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

Ahora partamos de las condiciones [2]. Para cada número ε positivo existen números positivos δ_1 y δ_2 tales que

$$|u - u_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si} \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_1$$

y

$$|v - v_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si} \quad 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta_2.$$

Sea δ el menor de los números δ_1 y δ_2. Dado que

$$|(u - u_0) + i(v - v_0)| \leqq |u - u_0| + |v - v_0|,$$

concluimos que

$$|(u + iv) - (u_0 + iv_0)| < \varepsilon$$

siempre que

$$0 < |(x + iy) - (x_0 + iy_0)| < \delta.$$

Esto no es sino [1], y la demostración está completa.

Teorema 2. *Supongamos que*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \quad \text{y} \quad \lim_{z \to z_0} F(z) = W_0. \qquad [3]$$

Entonces

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) + F(z)] = w_0 + W_0, \qquad [4]$$

$$\lim_{z \to z_0} [f(z)F(z)] = w_0 W_0, \qquad [5]$$

y, si $W_0 \neq 0$,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{F(z)} = \frac{w_0}{W_0}. \qquad [6]$$

Este teorema fundamental se puede probar directamente mediante la definición del límite de una función de una variable compleja. Ahora bien, gracias al Teorema 1 se deduce inmediatamente de los teoremas sobre límites de funciones reales de dos variables reales.

Para verificar la propiedad [5], por ejemplo, escribamos

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad F(z) = U(x, y) + iV(x, y),$$
$$z_0 = x_0 + iy_0, \quad w_0 = u_0 + iv_0, \quad W_0 = U_0 + iV_0.$$

Entonces, de acuerdo con las hipótesis [3] y el Teorema 1, los límites, cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0), de las funciones u, v, U, y V existen y tienen valores respectivos u_0, v_0, U_0 y V_0, Así que las componentes real e imaginaria del producto

$$f(z)F(z) = (uU - vV) + i(vU + uV)$$

tienen límites $u_0U_0 - v_0V_0$ y $v_0U_0 + u_0V_0$, respectivamente, cuando (x, y) tiende a (x_0, y_0). Luego, de nuevo por el Teorema 1, $f(z)F(z)$ tiene por límite

$$(u_0U_0 - v_0V_0) + i(v_0U_0 + u_0V_0)$$

cuando z tiende a z_0, y eso es igual a w_0, W_0. Queda establecida así la propiedad [5]. Verificaciones análogas llevan a [4] y [6].

De la definición de límite en la Sección 11, vemos que

$$\lim_{z \to z_0} z = z_0$$

para todo z_0, ya que podemos escribir $\delta = \varepsilon$ cuando $f(z) = z$. Entonces, por la propiedad [5] y por inducción matemática,

$$\lim_{z \to z_0} z^n = z_0^n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Además,

$$\lim_{z \to z_0} c = c$$

cuando c es una constante compleja. Así pues, a la vista de las propiedades [4] y [5], el límite de un polinomio

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

cuando z tiende a z_0 es el valor del polinomio en ese punto:

$$\lim_{z \to z_0} P(z) = P(z_0). \qquad [7]$$

Otra propiedad útil de los límites es

$$\text{si} \quad \lim_{z \to z_0} f(z) = w_0, \quad \text{entonces} \quad \lim_{z \to z_0} |f(z)| = |w_0|. \qquad [8]$$

Esta se comprueba fácilmente mediante la definición de límite y el hecho de que (véase Sec. 4)

$$||f(z)| - |w_0|| \leqq |f(z) - w_0|.$$

13. LIMITES Y EL PUNTO DEL INFINITO

Es conveniente incluir con el plano complejo el *punto del infinito*, denotado por ∞, y usar límites relacionados con él. El plano complejo junto con ese punto se llama *plano complejo extendido*. Con el fin de visualizar el punto del infinito, podemos pensar que el plano complejo pasa por el ecuador de una esfera unidad centrada en el punto $z = 0$ (Fig. 22). A cada punto z del plano le corresponde exactamente un punto P en la superficie de la esfera. El punto P se determina por intersección de la recta que pasa por el polo norte N y por el punto z con la superficie de la esfera. De forma análoga, cada P sobre la esfera, excepto el polo norte N, corresponde exactamente a un punto z del plano. Haciendo corresponder el polo norte N al punto del infinito, obtenemos una correspondencia uno a uno entre los puntos de la esfera y los del plano complejo extendido. La esfera se llama *esfera de Riemann*, y la correspondencia se llama *proyección estereográfica*.

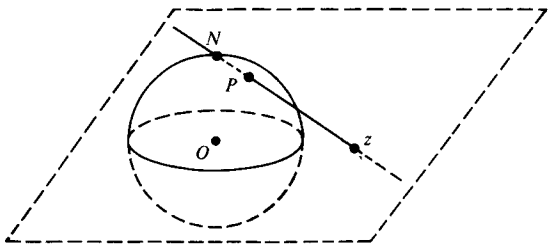


Figura 22

Hagamos notar que el exterior del círculo unidad centrado en el origen del plano complejo corresponde al hemisferio norte con el ecuador y el punto N suprimidos. Además, para cada ε positivo pequeño, aquellos puntos del plano complejo exteriores al círculo $|z| = 1/\varepsilon$ corresponden a puntos de la esfera próximos al N. Llamaremos al conjunto $|z| > 1/\varepsilon$ un ε *entorno*, o entorno, de ∞.

Por convenio de lenguaje, al referirnos a un punto z estaremos suponiendo

que se trata de un punto en el plano complejo *finito*. De ahora en adelante, cuando hayamos de considerar el punto del infinito lo mencionaremos explícitamente.

Ya se puede asignar un significado a la afirmación

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \qquad [1]$$

cuando alguno de los dos, z_0 o w_0, o ambos quizás, sean sustituidos por el punto del infinito. En la definición de límite en la Sección 11, reemplazamos sencillamente los entornos apropiados de z_0 y w_0 por entornos del infinito. La afirmación

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty,$$

por ejemplo, significa que para cada número positivo ε existe un número positivo δ tal que

$$|f(z)| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z - z_0| < \delta. \qquad [2]$$

Es decir, el punto $w = f(z)$ está en el ε entorno $|z| > 1/\varepsilon$ de ∞ siempre que z esté en el entorno punteado $0 < |z - z_0| < \delta$ de z_0. Puesto que [2] puede escribirse

$$\left| \frac{1}{f(z)} - 0 \right| < \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < |z - z_0| < \delta,$$

vemos que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{z \to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0. \qquad [3]$$

Ejemplo 1. Nótese que

$$\lim_{z \to -1} \frac{iz + 3}{z + 1} = \infty \quad \text{ya que} \quad \lim_{z \to -1} \frac{z + 1}{iz + 3} = 0.$$

Si

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = w_0,$$

entonces, para cada ε positivo existe un δ positivo tal que

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad |z| > \frac{1}{\delta}. \qquad [4]$$

Luego

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0 \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0. \qquad [5]$$

Ejemplo 2. Por [5],

$$\lim_{z\to\infty} \frac{2z + i}{z + 1} = 2 \quad \text{ya que} \quad \lim_{z\to 0} \frac{(2/z) + i}{(1/z) + 1} = \lim_{z\to 0} \frac{2 + iz}{1 + z} = 2.$$

El límite cuando ambos, z_0 y w_0, son sustituidos en el límite [2] por ∞, se define análogamente, y se sigue que

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{z\to 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0. \qquad [6]$$

14. CONTINUIDAD

Una función f es *continua* en un punto z_0 si se satisfacen estas tres condiciones:

$$\lim_{z\to z_0} f(z) \text{ existe}, \qquad [1]$$

$$f(z_0) \text{ existe}, \qquad [2]$$

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0). \qquad [3]$$

Nótese que [3] contiene en realidad a los otros dos, pues queda implícitamente supuesta la existencia de ambos miembros de esa ecuación. La afirmación [3] dice que para cada número positivo ε existe un número positivo δ tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |z - z_0| < \delta. \qquad [4]$$

Una función de una variable compleja se dice que es continua en una región R si lo es en todos sus puntos.

Si dos funciones son continuas en un punto, su suma y su producto también lo son; su cociente es continua en las mismas circunstancias siempre que el denominador no se anule en ese punto. Estas observaciones son consecuencias inmediatas del Teorema 2, Sección 12. Nótese además que un polinomio es continuo en todo el plano, debido a la Ecuación [7], Sección 12.

Se sigue directamente de la definición [4] que la *composición de dos funciones continuas es continua*. Para verlo, sea $w = f(z)$ una función definida para todo z de un entorno de z_0 y sea $g(w)$ una función cuyo dominio de definición contiene a la imagen (Sec. 10) de ese entorno. Entonces la composición $g[f(z)]$ está definida para todo z de ese entorno de z_0. Supongamos ahora que f es continua en z_0 y

que g es continua en el punto $w_0 = f(z_0)$. En vista de la continuidad de g en w_0, sabemos que para cada número positivo ε existe un número positivo γ tal que

$$|g[f(z)] - g[f(z_0)]| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |f(z) - f(z_0)| < \gamma.$$

Ahora bien, correspondiendo a γ, existe un número positivo δ tal que la segunda de estas desigualdades se satisface siempre que $|z - z_0| < \delta$. La continuidad de la composición $g[f(z)]$ queda con ello demostrada.

Es asimismo fácil ver a partir de [4] que *si una función $f(z)$ es continua y no nula en un punto z_0, entonces $f(z) \neq 0$ en algún entorno de ese punto.* Porque cuando $f(z_0) \neq 0$ y se toma $\varepsilon = |f(z_0)|/2$, como valor del número positivo ε en la primera de las desigualdades [4], sabemos que existe un número positivo δ tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \frac{|f(z_0)|}{2} \quad \text{si} \quad |z - z_0| < \delta.$$

Así que si existiese un punto z en el entorno $|z - z_0| < \delta$ tal que $f(z) = 0$, tendríamos la contradicción $|f(z_0)| < |f(z_0)|/2$.

Del Teorema 1, Sección 12, se desprende que una función f de una variable compleja es continua en un punto $z_0 = (x_0, y_0)$ si y sólo si sus funciones componentes u y v son continuas allí.

Ejemplo 1. La función

$$f(z) = xy^2 + i(2x - y)$$

es continua en todo el plano complejo porque las funciones componentes son polinomios en x e y, y por tanto continuas en todo punto (x, y).

Ejemplo 2. Análogamente, la función

$$f(z) = e^{xy} + i \operatorname{sen}(x^2 - 2xy^3)$$

es continua en todo z por la continuidad de los polinomios en x e y, así como la de las funciones exponencial y seno.

Varias propiedades de las funciones continuas de una variable compleja se siguen de las correspondientes en funciones reales de dos variables reales*. Supongamos, por ejemplo, que una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es continua en una región R que es a la vez cerrada y acotada. La función

$$\sqrt{[u(x, y)]^2 + [v(x, y)]^2}$$

* Para las propiedades aquí citadas, ver, por ejemplo, A. E. Taylor y W. R. Mann, *Advanced Calculus*, 3.ª ed., pp. 125-126 y 529-532, 1983.

es entonces continua en R y por tanto alcanza un valor máximo en algún lugar de R. Esto es, f es acotada en R y $|f(z)|$ alcanza un máximo en ella. Más precisamente, existe un número real no negativo M tal que

$$|f(z)| \leqq M \quad \text{para todo } z \text{ en } R, \qquad [5]$$

donde la igualdad es válida en al menos un z.

Otro resultado que se sigue del análogo en funciones reales de dos variables reales es el de que una función continua en una región cerrada y acotada R es *uniformemente continua* en ella. Esto es, puede escogerse un solo valor de δ, independiente de z_0, para el que [4] se satisface en todo punto z_0 de R.

EJERCICIOS

1. Sean a, b, c, y z_0 constantes complejas. Mediante la definición [2], Sección 11, de límite, probar que

a) $\lim_{z\to z_0} c = c$; *b)* $\lim_{z\to z_0} (az + b) = az_0 + b \quad (a \neq 0)$;

c) $\lim_{z\to z_0} (z^2 + c) = z_0^2 + c$; *d)* $\lim_{z\to z_0} \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} z_0$; *e)* $\lim_{z\to z_0} \bar{z} = \bar{z}_0$;

f) $\lim_{z\to 1-i} [x + i(2x + y)] = 1 + i \quad (z = x + iy)$; *g)* $\lim_{z\to 0} (\bar{z}^2/z) = 0$.

2. Demostrar la afirmación [4] del Teorema 2, Sección 12*a*) usando el Teorema 1, Sección 12, y propiedades de los límites de funciones reales de dos variables reales; *b*) directamente de la definición [2], Sección 11, de límite.

3. Sea n un entero positivo, y sean $P(z)$, $Q(z)$ polinomios, con $Q(z_0) \neq 0$. Usar el Teorema 2, Sección 12, y límites conocidos, para hallar

a) $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{z^n} \quad (z_0 \neq 0)$; *b)* $\lim_{z\to i} \frac{iz^3 - 1}{z + i}$; *c)* $\lim_{z\to z_0} \frac{P(z)}{Q(z)}$.

Sol. *a)* $1/z_0^n$; *b)* 0; *c)* $P(z_0)/Q(z_0)$.

4. Escribir $\Delta z = z - z_0$ y probar que

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \quad \text{si y sólo si} \quad \lim_{\Delta z\to 0} f(z_0 + \Delta z) = w_0.$$

5. Demostrar que

$$\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = 0 \quad \text{si} \quad \lim_{z\to z_0} f(z) = 0$$

y si existe un número positivo M tal que $|g(z)| \leqq M$ para todo z en algún entorno de z_0.

6. Probar la propiedad [8], Sección 12, de los límites.

7. Interpretar la afirmación [1], Sección 13, cuandos ambos, z_0 y w_0, son el punto del infinito, y verificar entonces la afirmación [6] de esa misma sección.

8. Utilizando las propiedades [3], [5] y [6] de los límites, Sección 13, probar que

a) $\lim_{z\to\infty} \frac{4z^2}{(z-1)^2} = 4$; *b)* $\lim_{z\to 1} \frac{1}{(z-1)^3} = \infty$; *c)* $\lim_{z\to\infty} \frac{z^2+1}{z-1} = \infty$.

9. Mediante las propiedades [3], [5] y [6], Sección 13, demostrar que cuando

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad - bc \neq 0),$$

a) $\lim_{z\to\infty} T(z) = \infty$ si $c = 0$;

b) $\lim_{z\to\infty} T(z) = \frac{a}{c}$ y $\lim_{z\to -d/c} T(z) = \infty$ si $c \neq 0$.

10. Usar las definiciones [2] y [4] de la Sección 13, relativas a límites en que aparece el punto del infinito, para demostrar que

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{z} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z} = 0.$$

11. Consideremos la función f definida sobre el plano complejo extendido como

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{z} & \text{cuando } z \neq 0, \\ \infty & \text{cuando } z = 0, \\ 0 & \text{cuando } z = \infty. \end{cases}$$

Permitiendo que los números z_0 y w_0 en la definición de continuidad, [3] de la Sección 14, sean el punto del infinito, y utilizando los límites del Ejercicio 10, explicar por qué f es continua en todo el plano extendido.

12. Razonar por qué los límites que involucran al punto del infinito son únicos.

13. Probar que un conjunto S es no acotado si y sólo si todo entorno del punto del infinito contiene al menos un punto de S.

15. DERIVADAS

Sea f una función cuyo dominio de definición contiene un entorno de z_0. La *derivada* de f en z_0, escrita $f'(z_0)$, se define por la ecuación

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \qquad [1]$$

supuesto que ese límite exista. La función f se dice *diferenciable* en z_0 cuando existe su derivada en z_0.

Expresando la variable z en la definición [1] en términos de la nueva variable compleja

$$\Delta z = z - z_0,$$

podemos escribir esa definición como

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}. \qquad [2]$$

Nótese que al estar f definida en un entorno de z_0, el número $f(z_0 + \Delta z)$ está siempre definido para $|\Delta z|$ suficientemente pequeño (Fig. 23).

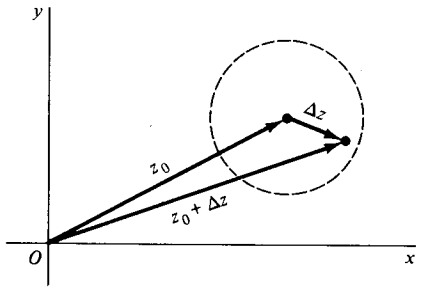


Figura 23

Al utilizar la forma [2] de la definición de derivada se suele omitir el subíndice de z_0, y se introduce el número

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z),$$

que denota el cambio en el valor de f correspondiente a un cambio Δz en el punto en el que evaluamos f. Entonces, si llamamos dw/dz a $f'(z)$, la Ecuación [2] se convierte en

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \qquad [3]$$

Ejemplo 1. Supongamos que $f(z) = z^2$. En cualquier punto z,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z + \Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) = 2z,$$

ya que $2z + \Delta z$ es un polinomio en Δz. Luego $dw/dz = 2z$, o sea $f'(z) = 2z$.

Ejemplo 2. Examinemos ahora la función $f(z) = |z|^2$. Aquí

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{|z + \Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) - z\bar{z}}{\Delta z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} + z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}.$$

Si el límite de $\Delta w/\Delta z$ existe, ese límite puede hallarse haciendo que el punto $\Delta z = (\Delta x, \Delta y)$ se aproxime al origen en el plano Δz de forma arbitraria. En particular, cuando Δz tiende hacia el origen horizontalmente por los puntos $(\Delta x, 0)$ del eje real (Fig. 24), podemos escribir $\overline{\Delta z} = \Delta z$. Por tanto, si existe el límite de $\Delta w/\Delta z$, su valor ha de ser $\bar{z} + z$. Sin embargo, cuando Δz tiende al origen verticalmente por los puntos $(0, \Delta y)$ del eje imaginario, de modo que $\overline{\Delta z} = -\Delta z$, hallamos que el límite debe ser $\bar{z} - z$, si existe. Como los límites son únicos, se deduce que $\bar{z} + z = \bar{z} - z$, o sea $z = 0$, si ha de existir dw/dz.

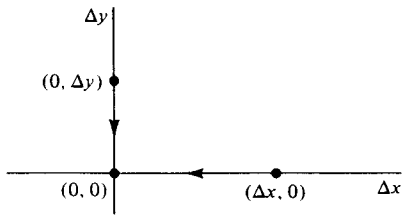


Figura 24

Para ver que, en efecto, dw/dz existe en $z = 0$, sólo necesitamos observar que nuestra expresión para $\Delta w/\Delta z$ se reduce a $\overline{\Delta z}$ cuando $z = 0$. Concluimos, en consecuencia, que dw/dz existe *sólo* en el punto $z = 0$, y su valor es 0 allí.

El Ejemplo 2 muestra que una función puede ser diferenciable en un cierto punto sin serlo en ningún otro punto de un entorno suyo. Puesto que las partes real e imaginaria de $f(z) = |z|^2$ son

$$u(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{y} \quad v(x, y) = 0, \qquad [4]$$

respectivamente, muestra asimismo que las componentes real e imaginaria de una función de una variable compleja pueden tener derivadas parciales continuas de todo orden y, no obstante, la función no ser diferenciable allí.

La función $f(z) = |z|^2$ es continua en todo punto del plano complejo, pues sus componentes [4] lo son. Así que la continuidad de una función en un punto no implica la existencia de derivada en él. Es cierto, sin embargo, que la *existencia de derivada de una función en un punto implica la continuidad de la función en ese punto*. Para verlo, supongamos que existe $f'(z_0)$ y escribamos

$$\lim_{z \to z_0} [f(z) - f(z_0)] = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \to z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0,$$

de donde

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Esto asegura la continuidad de f en z_0 (Sec. 14).

Las interpretaciones geométricas de la derivada de una función de una variable compleja no son tan inmediatas como en el caso real. Nos ocuparemos de ellas en el Capítulo 8.

16. FORMULAS DE DERIVACION

La definición de derivada en la Sección 15 es idéntica en su fórma a la de la derivada de una función real de una variable real. De hecho las fórmulas de derivación básicas que se recogen más abajo se pueden deducir de esa definición, junto con varios teoremas sobre límites, esencialmente por los mismos métodos que los utilizados en Cálculo. En estas fórmulas, la derivada de una función f en un punto z viene denotada bien sea por $f'(z)$ o por $d[f(z)]/dz$, dependiendo de cuál sea la notación más conveniente.

Sea c una constante compleja y sea f una función cuya derivada existe en un punto z. Es fácil demostrar que

$$\frac{d}{dz}\,c = 0, \quad \frac{d}{dz}\,z = 1, \quad \frac{d}{dz}\,[cf(z)] = cf'(z). \tag{1}$$

Asimismo, si n es un entero positivo,

$$\frac{d}{dz}\,z^n = nz^{n-1}. \tag{2}$$

Esta fórmula sigue siendo válida cuando n es un entero negativo, supuesto que $z \neq 0$.

Si existen en un punto z las derivadas de dos funciones f y F, entonces

$$\frac{d}{dz}\,[f(z) + F(z)] = f'(z) + F'(z). \tag{3}$$

$$\frac{d}{dz}\,[f(z)F(z)] = f(z)F'(z) + f'(z)F(z); \tag{4}$$

y, cuando $F(z) \neq 0$,

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{F(z)}\right] = \frac{F(z)f'(z) - f(z)F'(z)}{[F(z)]^2}. \tag{5}$$

Probemos la fórmula [4]. A tal fin, escribimos la siguiente expresión para el cambio que sufre el producto $f(z)F(z)$:

$$f(z + \Delta z)F(z + \Delta z) - f(z)F(z) = f(z)[F(z + \Delta z) - F(z)] + \\ + [f(z + \Delta z) - f(z)]F(z + \Delta z).$$

Si dividimos ambos lados de la ecuación por Δz y entonces hacemos tender Δz a cero, llegamos a la fórmula deseada para $d[f(z)F(z)]/dz$. Aquí hemos utilizado el hecho de que F es continua en el punto z, ya que existe $F'(z)$; así que $F(z + \Delta z)$ tiende a $F(z)$ cuando Δz tiende a cero (véase Ej. 4, Sec. 14).

Se dispone también de una regla de la cadena para derivar funciones compuestas. Supongamos que f tiene derivada en z_0 y que g tiene derivada en el punto $f(z_0)$. En tal caso, la función $F(z) = g[f(z)]$ tiene derivada en z_0, y es

$$F'(z_0) = g'[f(z_0)]f'(z_0). \tag{6}$$

Si denotamos $w = f(z)$ y $W = g(w)$, de modo que $W = F(z)$, la regla de la cadena se convierte en

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dw}\,\frac{dw}{dz}.$$

Ejemplo. Para hallar la derivada de $(2z^2 + i)^5$, llamamos $w = 2z^2 + i$ y $W = w^5$. Entonces

$$\frac{d}{dz}\,(2z^2 + i)^5 = 5w^4 4z = 20z(2z^2 + i)^4.$$

Comenzaremos la demostración de [6] eligiendo un punto específico z_0 en el que exista $f'(z_0)$. Escribimos $w_0 = f(z_0)$ y suponemos que también existe $g'(z_0)$. Existe entonces algún ε entorno $|w - w_0| < \varepsilon$ de w_0 tal que para todo punto w en él podemos definir una función Φ que tiene por valores $\Phi(w_0) = 0$ y

$$\Phi(w) = \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} - g'(w_0) \quad \text{cuando} \quad w \neq w_0. \tag{7}$$

Hagamos notar que, a la vista de la definición de derivada,

$$\lim_{w \to w_0} \Phi(w) = 0. \tag{8}$$

Por tanto, Φ es continua en w_0.

Ahora la expresión [7] admite la forma

$$g(w) - g(w_0) = [g'(w_0) + \Phi(w)](w - w_0) \qquad (|w - w_0| < \varepsilon), \tag{9}$$

que es válida incluso cuando $w = w_0$; y como existe $f'(z_0)$ y en consecuencia f es continua en z_0, podemos escoger un número positivo δ tal que el punto $f(z)$ está en el ε entorno $|w - w_0| < \varepsilon$ de w_0, si z está en el δ entorno $|z - z_0| < \delta$ de z_0. Así pues, es legítimo sustituir la variable w en la Ecuación [9] por $f(z)$ cuando z es cualquier punto del entorno $|z - z_0| < \delta$. Con dicha sustitución, junto con la de $w_0 = f(z_0)$, la Ecuación [9] queda

$$\frac{g[f(z)] - g[f(z_0)]}{z - z_0} = \{g'[f(z_0)] + \Phi[f(z)]\}\,\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (0 < |z - z_0| < \delta), \tag{10}$$

donde debemos estipular que $z \neq z_0$ de manera que no haya división por cero. Como ya se ha hecho notar, f es continua en z_0 y Φ lo es en el punto $w_0 = f(z_0)$. Luego la composición $\Phi[f(z)]$ es continua en z_0; y como $\Phi(w_0) = 0$,

$$\lim_{z \to z_0} \Phi[f(z)] = 0.$$

Luego la ecuación (10) pasa a ser

$$F'(z_0) = g'[f(z_0)]f'(z_0)$$

en el límite, cuando z tiende a z_0.

EJERCICIOS

1. Usar los resultados de la Sección 16 para hallar $f'(z)$ si

   a) $f(z) = 3z^2 - 2z + 4$; *b)* $f(z) = (1 - 4z^2)^3$;

   c) $f(z) = (z - 1)/(2z + 1)(z \neq -\frac{1}{2})$; *d)* $f(z) = (1 + z^2)^4/z^2$ $(z \neq 0)$.

2. Mediante los resultados de la Sección 16 probar que

   a) un polinomio

   $$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \qquad (a_n \neq 0)$$

   de grado $n (n \geqslant 1)$ es diferenciable en todas partes, con derivada

   $$P'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1};$$

   b) los coeficientes del polinomio $P(z)$ de la parte *(a)* se pueden expresar como

   $$a_0 = P(0), \quad a_1 = \frac{P'(0)}{1!}, \; a_2 = \frac{P''(0)}{2!}, \; \ldots, \; a_n = \frac{P^{(n)}(0)}{n!}.$$

3. Aplicar la definición [3], Sección 15, de la derivada para dar una demostración directa de que $f'(z) = -1/z^2$ cuando $f(z) = 1/z$ $(z \neq 0)$.

4. Deducir la definición [3], Sección 16, para la derivada de la suma de dos funciones.

5. Deducir [2], Sección 16, para la derivada de z^n cuando n es un entero positivo, usando

   a) Inducción matemática y la fórmula [4], Sección 16, para la derivada del producto de dos funciones;

   b) la definición [3], Sección 15, de derivada y la fórmula del binomio (Ej. 16, Sec. 2).

6. Demostrar que la expresión [2], Sección 16, para la derivada de z^n, sigue siendo válida cuando n es negativo ($n = -1, -2, \ldots$), supuesto que $z \neq 0$.

   Sugerencia: Hacer $m = -n$ y usar la fórmula de derivación de un cociente de dos funciones.

7. Sea

   $$f(z) = \begin{cases} \dfrac{(\bar{z})^2}{z} & \text{si} \quad z \neq 0, \\ 0 & \text{si} \quad z = 0. \end{cases}$$

   Probar que si $z = 0$, entonces $\Delta w/\Delta z = 1$ en cada punto no nulo sobre los ejes real e imaginario del plano Δz, y que $\Delta w/\Delta z = -1$ en todo punto no nulo Δx, Δx de la recta $\Delta x = \Delta y$ en ese plano, donde $\Delta z = (\Delta x, \Delta y)$. Concluir de esas observaciones que $f'(0)$ no existe. (Nótese que, para obtener este resultado, no es suficiente considerar sólo las direcciones horizontal y vertical a la hora de tender hacia el origen en el plano Δz.)

8. Por el método del Ejemplo 2, Sección 15, demostrar que $f'(z)$ no existe en ningún punto z si $f(z)$ es

   a) $\bar{z}$; *b)* Re z; *c)* Im z.

17. ECUACIONES DE CAUCHY-RIEMANN

En esta sección obtendremos un par de ecuaciones que deben satisfacer las primeras derivadas parciales de las funciones componentes u y v de una función

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \qquad [1]$$

en un punto $z_0 = (x_0, y_0)$ para que exista en él la derivada de f. También veremos cómo se puede escribir $f'(z_0)$ en términos de tales derivadas parciales.

Supongamos que existe la derivada

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \qquad [2]$$

Poniendo $z_0 = x_0 + iy_0$ y $\Delta z = \Delta x + i\,\Delta y$, tenemos, por el Teorema 1 de la Sección 12, las expresiones

$$\text{Re}[f'(z_0)] = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \text{Re}\left[\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}\right], \qquad [3]$$

$$\text{Im}[f'(z_0)] = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \text{Im}\left[\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}\right], \qquad [4]$$

donde

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \tag{5}$$

$$= \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) + i[v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)]}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Es importante ahora tener en cuenta que las expresiones [3] y [4] son válidas cuando $(\Delta x, \Delta y)$ tiende a (0, 0) de todas las maneras posibles.

En particular, hagamos tender $(\Delta x, \Delta y)$ hacia (0, 0) horizontalmente por los puntos $(\Delta x, 0)$, como se indica en la Figura 24 (Sec. 15). Ello significa que $\Delta y = 0$ en la Ecuación [5], y nos encontramos con que

$$\mathrm{Re}[f'(z_0)] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

$$\mathrm{Im}[f'(z_0)] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Esto es,

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0), \tag{6}$$

donde $u_x(x_0, y_0)$ y $v_x(x_0, y_0)$ denotan las primeras derivadas parciales con respecto a x de las funciones u y v en (x_0, y_0).

También podemos hacer tender $(\Delta x, \Delta y)$ a cero verticalmente, a través de los puntos $(0, \Delta y)$. En tal caso, $\Delta x = 0$ en la Ecuación [5], con lo que obtenemos

$$f'(z_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) \tag{7}$$

para $f'(z_0)$, esta vez en términos de las primeras derivadas parciales de u y v respecto a y, evaluadas en (x_0, y_0). Nótese que [7] se puede reformular como

$$f'(z_0) = -i[u_y(x_0, y_0) + iv_y(x_0, y_0)].$$

Las ecuaciones [6] y [7] no sólo dan $f'(z_0)$ en términos de derivadas parciales de las funciones componentes u y v, sino que proporcionan condiciones necesarias para la existencia de $f'(z_0)$. Porque, igualando las partes real e imaginaria de los miembros de la derecha en ambas ecuaciones, vemos que la existencia de $f'(z_0)$ exige que

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \quad \text{y} \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \tag{8}$$

Las ecuaciones [8] son las *ecuaciones de Cauchy-Riemann*, llamadas así en honor del matemático francés A. L. Cauchy (1789-1857), quien las descubrió y utilizó, y

del matemático alemán G. F. B. Riemann (1826-1866), quien las convirtió en fundamentales en su desarrollo de la teoría de funciones de una variable compleja.

Resumimos los resultados precedentes como sigue.

Teorema. *Supongamos que*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

y que $f'(z)$ existe en un punto $z_0 = x_0 + iy_0$. Entonces las primeras derivadas parciales de u y v deben existir en ese punto y deben satisfacer en él las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \tag{9}$$

Además, $f'(z_0)$ se puede expresar como

$$f'(z_0) = u_x + iv_x, \tag{10}$$

donde las derivadas parciales están evaluadas en (x_0, y_0).

Ejemplo 1. En el Ejemplo 1, Sección 15, probamos que la función

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

es diferenciable en todas partes, y que $f'(z) = 2z$. Para comprobar que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen en todas partes, notemos que $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$. Así pues,

$$u_x = 2x = v_y, \quad u_y = -2y = -v_x.$$

Además, de acuerdo con la Ecuación [10],

$$f'(z) = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z.$$

Como las ecuaciones de Cauchy-Riemann son condiciones necesarias para la existencia de la derivada de una función f en un punto z_0, suelen utilizarse para localizar los puntos en los que f *no* admite derivada.

Ejemplo 2. La función $f(z) = |z|^2$ fue discutida en el Ejemplo 2, Sección 15. En este caso, $u(x, y) = x^2 + y^2$ y $v(x, y) = 0$, luego $u_x = 2x$ y $v_y = 0$, mientras que $u_y = 2y$ y $v_x = 0$. Puesto que las ecuaciones de Cauchy-Riemann no se satisfacen salvo si $x = y = 0$, la derivada $f'(z)$ no existe si $z \neq 0$.

Hagamos constar que el teorema anterior no asegura la existencia de $f'(0)$. El teorema de la próxima sección sí garantiza su existencia.

18. CONDICIONES SUFICIENTES

El que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfagan en un punto $z_0 = (x_0, y_0)$ no basta para asegurar la existencia de la derivada de una función $f(z)$ en ese punto. (Ver Ej. 6, Sec. 19). Pero con ciertos requisitos de continuidad se tiene el siguiente resultado.

Teorema. *Sea la función*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

definida en algún ε entorno de un punto $z_0 = x_0 + iy_0$. Supongamos que las derivadas parciales de primer orden de las funciones u y v con respecto a x e y existen en todos los puntos de ese entorno y son continuas en (x_0, y_0). Entonces, si esas derivadas parciales satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

en (x_0, y_0), la derivada $f'(z_0)$ existe.

Para comenzar la demostración, escribamos $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, donde $0 < |\Delta z| < \varepsilon$, y

$$\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0).$$

Por tanto,

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v,$$

con

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0), \\ \Delta v &= v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0). \end{aligned} \qquad [1]$$

Ahora bien, a la vista de la continuidad de las primeras derivadas parciales de u y de v en el punto (x_0, y_0),

$$\begin{aligned} \Delta u &= u_x(x_0, y_0)\,\Delta x + u_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \\ \Delta v &= v_x(x_0, y_0)\,\Delta x + v_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_2\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \end{aligned} \qquad [2]$$

donde ε_1 y ε_2 tiende a 0 cuando $(\Delta x, \Delta y)$ tiende a $(0, 0)$ en el plano Δz. Luego

$$\begin{aligned} \Delta w = {} & u_x(x_0, y_0)\,\Delta x + u_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_1\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ & + i[v_x(x_0, y_0)\,\Delta x + v_y(x_0, y_0)\,\Delta y + \varepsilon_2\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}]. \end{aligned} \qquad [3]$$

La existencia de expresiones del tipo [2] para funciones de dos variables reales con derivadas parciales de primer orden se establece en el Cálculo en relación con las diferenciales*.

Supuesto que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se cumplen en (x_0, y_0), podemos reemplazar $u_y(x_0, y_0)$ por $-v_x(x_0, y_0)$ y $v_y(x_0, y_0)$ por $u_x(x_0, y_0)$ en [3] y dividir después por Δz para obtener

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)\frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta z}. \qquad [4]$$

Pero $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = |\Delta z|$, y por tanto

$$\left|\frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta z}\right| = 1.$$

Asimismo, $\varepsilon_1 + i\varepsilon_2$ tiende a 0 cuando $(\Delta x, \Delta y)$ tiende a $(0, 0)$. Así que el último término de la derecha en la Ecuación [4] tiende a 0 cuando la variable $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ tiende a 0. Eso quiere decir que el límite del lado izquierdo de la ecuación [4] existe y que

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0). \qquad [5]$$

Ejemplo 1. Supongamos que

$$f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y),$$

donde hay que tomar y en radianes a la hora de evaluar cos y y sen y. Entonces

$$u(x, y) = e^x \cos y \quad \text{y} \quad v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y.$$

Como $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$ en todas partes, y las derivadas son continuas en todas partes, las condiciones requeridas por el teorema se cumplen en todo el plano complejo. Por tanto, $f'(z)$ existe en todas partes, y

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Nótese que $f'(z) = f(z)$.

Ejemplo 2. Del teorema de esta sección se deduce también que la función

$$f(z) = |z|^2 = (x^2 + y^2) + i0$$

* Véase, por ejemplo, A. E. Taylor y W. R. Mann, *Advanced Calculus*, 3.ª ed., pág. 150-151 y 197-198, 1983.

tiene derivada en $z = 0$. En efecto, $f'(0) = 0 + i0$ (comparar con el Ej. 2 de la Sec. 15). Vimos en el Ejemplo 2 de la Sección 17 que esta función no puede tener derivada en ningún punto no nulo, porque en ellos no se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

19. COORDENADAS POLARES

Cuando $z_0 \neq 0$, el teorema de la Sección 18 se reformula en coordenadas polares mediante la transformación de coordenadas (Sec. 5).

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta. \tag{1}$$

Según escribamos

$$z = x + iy \quad \text{o} \quad z = re^{i\theta} \qquad (z \neq 0)$$

cuando $w = f(z)$, las partes real e imaginaria de $w = u + v$ se expresan en términos de las variables x, y o de r, θ. Supongamos que existen en todas partes las derivadas parciales de primer orden de u y de v con respecto a x e y en algún entorno de un punto no nulo z_0, y que son continuas en ese punto. Las derivadas parciales de primer orden con respecto a r y θ tienen también esas propiedades, y la regla de la cadena para la derivación de funciones reales de dos variables reales se puede usar para escribirlas en términos de las antedichas. Más concretamente, como

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta},$$

podemos escribir

$$u_r = u_x \cos \theta + u_y \operatorname{sen} \theta, \quad u_\theta = -u_x r \operatorname{sen} \theta + u_y r \cos \theta. \tag{2}$$

Análogamente,

$$v_r = v_x \cos \theta + v_y \operatorname{sen} \theta, \quad v_\theta = -v_x r \operatorname{sen} \theta + v_y r \cos \theta. \tag{3}$$

Si las derivadas parciales con respecto a x e y satisfacen además las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x \tag{4}$$

en z_0, las ecuaciones [3] pasan a ser

$$v_r = -u_y \cos \theta + u_x \operatorname{sen} \theta, \quad v_\theta = u_y r \operatorname{sen} \theta + u_x r \cos \theta \tag{5}$$

en ese punto. Es claro entonces, de las ecuaciones [2] y [5], que

$$\boxed{u_r = \frac{1}{r} v_\theta, \frac{1}{r} u_\theta = -v_r} \tag{6}$$

en el punto z_0.

Si se sabe, por otra parte, que las ecuaciones [6] son válidas en z_0, es sencillo probar (Ej. 7) que las ecuaciones [4] se cumplen en él. Las ecuaciones [6] son por consiguiente, una forma alternativa de las ecuaciones de Cauchy-Riemann [4].

Ya podemos reformular el teorema de la Sección 18 en coordenadas polares.

Teorema. *Sea la función*

$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

definida en algún ε entorno de un punto no nulo $z_0 = r_0 \exp(i\theta_0)$. Supongamos que las primeras derivadas parciales de las funciones u y v con respecto a r y θ existen en todos los puntos de ese entorno y son continuas en (r_0, θ_0). Entonces, si esas derivadas parciales satisfacen la forma polar [6] *de las ecuaciones de Cauchy-Riemann en (r_0, θ_0), la derivada $f'(z_0)$ existe.*

Aquí la derivada $f'(z_0)$ se puede escribir (ver Ej. 8)

$$f'(z_0) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r), \tag{7}$$

donde el miembro de la derecha ha sido calculado en (r_0, θ_0).

Ejemplo. Consideremos la función

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}}.$$

Como

$$u(r, \theta) = \frac{\cos \theta}{r} \quad \text{y} \quad v(r, \theta) = -\frac{\operatorname{sen} \theta}{r},$$

Las condiciones del teorema se satisfacen en cualquier punto $z = re^{i\theta}$ no nulo del plano. Por tanto, la derivada de f existe en ellos, y de acuerdo con la expresión [7],

$$f'(z) = e^{-i\theta}\left(-\frac{\cos \theta}{r^2} + i\frac{\operatorname{sen} \theta}{r^2}\right) = -\frac{1}{(re^{i\theta})^2} = -\frac{1}{z^2}.$$

EJERCICIOS

1. Usar el teorema de la Sección 7 para probar que $f'(z)$ no existe en ningún punto para

a) $f(z) = \bar{z}$; *b)* $f(z) = z - \bar{z}$; *c)* $f(z) = 2x + ixy^2$;

d) $f(z) = e^x e^{-iy}$.

2. Demostrar, mediante el teorema de la Sección 18, que $f'(z)$ y su derivada $f''(z)$ existen en todas partes, y calcular $f''(z)$, para

a) $f(z) = iz + 2$; *b)* $f(z) = e^{-x}e^{-iy}$; *c)* $f(z) = z^3$;

d) $f(z) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y$.

Sol. *b)* $f''(z) = f(z)$; *d)* $f''(z) = -f(z)$.

3. De los resultados obtenidos en las Secciones 17 y 18, determinar dónde existe $f'(z)$ y calcular sus valores, para

a) $f(z) = 1/z$; *b)* $f(z) = x^2 + iy^2$; *c)* $f(z) = z \operatorname{Im} z$.

Sol. *a)* $f'(z) = -1/z^2$ $(z \neq 0)$; *b)* $f'(x + ix) = 2x$; *c)* $f'(0) = 0$.

4. Demostrar, con ayuda del teorema de la Sección 19, que cada una de estas funciones es diferenciable en el dominio de definición indicado, y usar entonces la expresión [7] para hallar $f'(z)$:

a) $f(z) = 1/z^4$ $(z \neq 0)$; *b)* $f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ $(r > 0, -\pi < \theta < \pi)$;

c) $f(z) = e^{-\theta} \cos(\ln r) + ie^{-\theta} \operatorname{sen}(\ln r)(r > 0, 0 < \theta\ 2\pi)$.

Sol. *b)* $f'(z) = 1/[2f(z)]$; *c)* $f'(z) = if(z)/z$.

5. Probar que cuando $f(z) = x^3 + i(1 - y)^3$, es legítimo escribir

$$f'(z) = u_x + iv_x = 3x^2$$

sólo si $z = i$.

6. Sean u y v las componentes real e imaginaria de la función f definida por las ecuaciones

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{(\bar{z})^2}{z} & \text{cuando} \quad z \neq 0, \\ 0 & \text{cuando} \quad z = 0. \end{cases}$$

Verificar que las ecuaciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$ se satisfacen en el origen $z = (0, 0)$. [Comparar con el Ejercicio 7 de la Sección 16, donde se demuestra que, a pesar de todo, $f'(0)$ no existe.]

7. Resolver las ecuaciones [2], Sección 19, para u_x y u_y con el fin de probar que

$$u_x = u_r \cos\theta - u_\theta \frac{\operatorname{sen}\theta}{r}, \quad u_y = u_r \operatorname{sen}\theta + u_\theta \frac{\cos\theta}{r}.$$

Usar entonces estas ecuaciones y las similares para v_x y v_y para demostrar que, en la Sección 19, las ecuaciones [4] se cumplen en un punto z_0 si se satisfacen en él las ecuaciones [6]. Completar así la verificación de que las ecuaciones [6], Sección 19, son las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar.

8. Supongamos que una función $f(z) = u + iv$ es diferenciable en un punto no nulo $z_0 = r_0 \exp(i\theta_0)$. Usar las expresiones halladas en el Ejercicio 7 para u_x y v_y, junto con la forma polar [6], Sec. 19, de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, para demostrar que $f'(z_0)$ puede escribirse como

$$f'(z_0) = e^{-i\theta}(u_r + iv_r),$$

donde u_r y v_r se calculan en (r_0, θ_0).

9. *a)* Con ayuda de la forma polar de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, deducir la forma alternativa

$$f'(z_0) = \frac{-i}{z_0}(u_\theta + iv_\theta)$$

de las expresiones para $f'(z_0)$ en el Ejercicio 8.

b) Utilizar la expresión de $f'(z_0)$ obtenida en el apartado *(a)* para probar que la derivada de la función $f(z) = 1/z (z \neq 0)$ en el ejemplo de la Sección 19 es $f'(z) = -1/z^2$.

10. *a)* Recordemos (Sec. 3) que si $z = x + iy$, entonces

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \quad \text{y} \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

Aplicando *formalmente* la regla de la cadena a una función de dos variables, deducir la fórmula

$$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x} + i\frac{\partial F}{\partial y}\right).$$

b) Definamos el operador

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

a sugerencia del apartado *a*), para probar que si las derivadas parciales de primer orden de las partes real e imaginaria de una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \tfrac{1}{2}[u_x - v_y + i(v_x + u_y)] = 0.$$

Deducir así *la forma compleja* $\partial f/\partial \bar{z} = 0$ *de las ecuaciones de Cauchy-Riemann.*

20. FUNCIONES ANALITICAS

Ya estamos preparados para introducir el concepto de función analítica. Una función f de la variable compleja z se dice *analítica* en un conjunto abierto si tiene derivada en todo punto de ese abierto*. Cuando hablemos de una función analítica sobre un conjunto S que no es abierto, quedará sobreentendido que la función es analítica en algún abierto que contiene a S. En particular, *f es analítica en un punto z_0* si es analítica en un entorno de z_0.

Notemos, por ejemplo, que la función $f(z) = 1/z$ es analítica en todo punto no nulo del plano finito, mientras que la función $f(z) = |z|^2$ no es analítica en ningún punto, porque sólo admite derivada en $z = 0$, pero no en un entorno. (Ver Ejemplo 2, Sección 15).

Una función *entera* es una función que es analítica en todos los puntos del plano finito. Ya que la derivada de un polinomio existe en todas partes, *todos los polinomios son funciones enteras.*

Si una función no es analítica en un punto z_0 pero es analítica en algún punto de todo entorno de z_0, se dice que z_0 es un *punto singular*, o una *singularidad*, de f. El punto $z = 0$ es obviamente singular para la función $f(z) = 1/z$. La función $f(z) = |z|^2$, por su parte, carece de singularidades, pues no es analítica en ningún punto.

Una condición necesaria, pero en modo alguno suficiente, para que f sea analítica en un dominio D es claramente la continuidad de f sobre D. El que se cumplan las ecuaciones de Cauchy-Riemann es también necesario, pero tampoco suficiente. Los teoremas de las Secciones 18 y 19 dan condiciones suficientes de analiticidad en D.

Otras condiciones suficientes útiles se obtienen de las fórmulas de derivación de la Sección 16. Las derivadas de la suma y del producto de dos funciones existen siempre que ambas funciones tengan derivada. Así pues, *si dos funciones son analíticas en un dominio D, su suma y su producto son analíticos ambos en D.* Análogamente, *su cociente es analítico en D supuesto que la función del denominador no se anule en ningún punto de D.* En particular, el cociente $P(z)/Q(z)$ de dos polinomios, es analítica en cualquier dominio en el que $Q(z) \neq 0$.

* En la literatura se emplean con frecuencia los términos *holomorfas* y *regulares* para referirse a las funciones analíticas.

Con la regla de la cadena para la derivada de una función compuesta encontramos que *una función compuesta de dos funciones analíticas es analítica.* Ilustraremos esto mediante un ejemplo que involucra coordenadas polares.

Ejemplo. Si

$$f(z) = z + \frac{1}{z} \quad y \quad g(z) = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2} \qquad (r > 0,\ -\pi < \theta < \pi),$$

entonces la composición $g[f(z)]$ está bien definida sobre cualquier dominio cuya imagen bajo la transformación $w = f(z)$ esté contenida en el dominio $\rho > 0$, $-\pi < \phi < \pi$ del plano w, donde $w = \rho e^{i\phi}$.

Consideremos, como ejemplo, el dominio D consistente en los puntos del semiplano superior Im $z > 0$ del plano z que son exteriores al círculo $|z| = 1$. Cuando $w = f(z)$, la imagen de D es el semiplano superior Im $w > 0$ del plano w (véase Ej. 2, Sec. 10). Como la función $g(w) = \sqrt{\rho}\, e^{i\phi/2}$ $(\rho > 0, -\pi < \phi < \pi)$, cuyos valores son raíces cuadradas de w (Ej. 3, Sec. 9), está bien definida sobre el semiplano Im $w > 0$, la función compuesta $g[f(z)]$ está evidentemente bien definida sobre D. Además, como $g(w)$ es analítica, con derivada $g'(w) = 1/[2g(w)]$, en el dominio Im $w > 0$ [ver el Ejercicio 4(b), Sección 19], $g[f(z)]$ es también analítica en D.

Nótese que, de acuerdo con la regla de la cadena,

$$\frac{d}{dz}\, g[f(z)] = g'[f(z)]f'(z) = \frac{1}{2g[f(z)]}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right).$$

Concluiremos esta sección con una propiedad esperada y especialmente útil de las funciones analíticas.

Teorema. *Si $f'(z) = 0$ en todos los puntos de un dominio D, entonces $f(z)$ es constante sobre D.*

Para demostrarlo, escribimos $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Entonces, supuesto que $f'(z) = 0$ en D, observamos que $u_x + iv_x = 0$, y, a la vista de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, $v_y - iu_y = 0$. Por tanto,

$$u_x = u_y = v_x = v_y = 0$$

en cada punto de D.

Ahora bien, u_x y u_y son las componentes x e y del vector grad u, y la componente de grad u en un punto dado en una dirección concreta es la derivada direccional de u allí en esa dirección. Luego el que u_x y u_y sean siempre cero significa que grad u es siempre el vector cero, y por tanto que cualquier derivada

direccional de u es cero. En consecuencia, u es constante a lo largo de todo segmento recto contenido en D, y como todo par de puntos de D se pueden unir por un conjunto finito de tales segmentos unidos por los extremos (Sec. 8), los valores de u en esos puntos han de ser iguales. Podemos concluir, pues, que existe una constante real a tal que $u(x, y) = a$ sobre D. Análogamente, $v(x, y) = b$, y se sigue que $f(z) = a + ib$ en todo punto de D.

21. FUNCIONES ARMONICAS

Una función real h de dos variables reales x e y se dice *armónica* en un dominio dado del plano xy si sobre ese dominio tiene derivadas parciales continuas de primer y segundo orden, y satisfacen la ecuación

$$h_{xx}(x, y) + h_{yy}(x, y) = 0 \qquad [1]$$

La Ecuación [1] se conoce como *ecuación de Laplace*.

El próximo teorema es fuente de funciones armónicas y es fundamental en la teoría de las funciones analíticas.

Teorema 1. *Si una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio D, sus funciones componentes u y v son armónicas en D.*

Para demostrarlo necesitamos un resultado que se probará en el Capítulo 4 (Sec. 40), a saber, que si una función de una variable compleja es analítica en un punto, entonces sus partes real e imaginaria tienen derivadas parciales de todo orden en ese punto.

Supuesta f analítica en D, partimos de la observación de que las derivadas de primer orden de sus funciones componentes han de cumplir las ecuaciones de Cauchy-Riemann sobre D:

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x. \qquad [2]$$

Derivando ambos lados de esas ecuaciones respecto de x, tenemos

$$u_{xx} = v_{yx}, \quad u_{yx} = -v_{xx}. \qquad [3]$$

Del mismo modo, derivando en y se llega a

$$u_{xy} = v_{yy}, \quad u_{yy} = -v_{xy}. \qquad [4]$$

Pero por un teorema de Cálculo avanzado* la continuidad de las derivadas

* Véase, por ejemplo, A. E. Taylor y W. R. Mann, *Advanced Calculus*, 3.ª ed., pp. 199-201, 1983.

parciales de u y v asegura que $u_{yx} = u_{xy}$ y $v_{yx} = v_{xy}$. Luego de [3] y [4] se sigue que

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{y} \quad v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

Esto es, u y v son armónicas en D.

Ejemplo 1. Ya que las funciones

$$f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

y

$$g(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

son enteras (Ejemplo 1, Sección 18), también lo es su producto. Por el Teorema 1, por tanto, la función

$$\text{Re}\,[f(z)g(z)] = e^x[(x^2 - y^2)\cos y - 2xy \operatorname{sen} y]$$

es armónica en todo el plano.

Si dos funciones dadas u y v son armónicas en un dominio D y sus derivadas parciales de primer orden satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann [2] en D, se dice que v es *armónica conjugada de u*. El significado de la palabra *conjugada* aquí es, claro está, diferente del de la Sección 3, donde se definió $\bar{z}$.

Es evidente que si una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio D, entonces v es una armónica conjugada de u. Recíprocamente, si v es una armónica conjugada de u en un dominio D, la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en D. Esto es consecuencia del teorema de la Sección 18. Enunciamos este resultado como teorema.

Teorema 2. *Una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un dominio D si y sólo si v es una armónica conjugada de u.*

El próximo ejemplo muestra que si v es armónica conjugada de u en algún dominio, *no* es cierto, en general, que u sea armónica conjugada de v en él.

Ejemplo 2. Sean

$$u(x, y) = x^2 - y^2 \quad \text{y} \quad v(x, y) = 2xy.$$

Como son las partes real e imaginaria, respectivamente, de la función entera $f(z) = z^2$, sabemos que v es armónica conjugada de u en todo el plano. Pero u no puede ser armónica conjugada de v porque, según el teorema de la Sección 17, la función $2xy + i(x^2 - y^2)$ no es analítica en ningún punto. Dejamos como ejercicio probar que si dos funciones u y v han de ser armónica conjugada una de otra, ambas han de ser constantes.

Es, no obstante, cierto que si v es armónica conjugada de u en el dominio D, entonces $-u$ es armónica conjugada de v en D, y recíprocamente. Eso se ve escribiendo

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad -if(z) = v(x, y) - iu(x, y)$$

y observando que $f(z)$ es analítica en D si y sólo si $-if(z)$ es analítica allí.

En el Capítulo 8 (Sec. 75) demostraremos que una función u que es armónica en un dominio de cierto tipo siempre tiene una armónica conjugada. Así pues, en tales dominios, toda función armónica es la parte real de una función analítica. Es también cierto que una armónica conjugada, cuando existe, es única salvo constantes aditivas.

Ejemplo 3. Ilustraremos ahora otro método para la obtención de una armónica conjugada de una función armónica dada. La función

$$u(x, y) = y^3 - 3x^2y \qquad [5]$$

se ve fácilmente que es armónica en todo el plano xy. Para calcular una armónica conjugada $v(x, y)$ hagamos notar que

$$u_x(x, y) = -6xy.$$

De manera que, en vista de la condición $u_x = v_y$, podemos escribir

$$v_y(x, y) = -6xy.$$

Manteniendo x fija e integrando los dos lados de esa ecuación en y, encontramos que

$$v(x, y) = -3xy^2 + \phi(x), \qquad [6]$$

donde ϕ es, por el momento, una función arbitraria de x. Como ha de cumplirse $u_y = -v_x$, se sigue de [5] y [6] que

$$3y^2 - 3x^2 = 3y^2 - \phi'(x).$$

Luego $\phi'(x) = 3x^2$, o sea $\phi(x) = x^3 + c$ donde c es un número real arbitrario. Por tanto, la función

$$v(x, y) = x^3 - 3xy^2 + c$$

es una armónica conjugada de $u(x, y)$.

La función analítica correspondiente es

$$f(z) = (y^3 - 3x^2y) + i(x^3 - 3xy^2 + c). \qquad [7]$$

Se comprueba sin dificultad que

$$f(z) = i(z^3 + c).$$

Esta forma viene sugerida observando que cuando $y = 0$, la Ecuación [7] se convierte en

$$f(x) = i(x^3 + c).$$

Las funciones armónicas juegan un papel importante en Matemática Aplicada. Por ejemplo, las temperaturas en láminas delgadas, sin fuentes o sumideros de calor, y cuyas propiedades térmicas no varíen punto a punto en el plano xy son armónicas. Una función $V(x, y)$ es también armónica si representa un potencial electrostático que varía con x e y sólo en una región del espacio tridimensional que está libre de cargas. El uso de la teoría de funciones de una variable compleja para hallar tales funciones armónicas se tratará en detalle en el Capítulo 9 y en parte de los capítulos subsiguientes.

EJERCICIOS

1. Aplicar el teorema de la Sección 18 para comprobar que cada una de estas funciones es entera:

a) $f(z) = 3x + y + i(3y - x)$; *b)* $f(z) = \text{sen } x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y$;

c) $f(z) = e^{-y}e^{ix}$; *d)* $f(z) = (z^2 - 2)e^{-x}e^{-iy}$.

2. Con ayuda del teorema de la Sección 17, demostrar que estas funciones no son analíticas en ningún punto:

a) $f(z) = xy + iy$; *b)* $f(z) = e^{y}e^{ix}$.

3. Explicar por qué la composición de dos funciones enteras es entera. Idem para una *combinación lineal* $c_1f_1(z) + c_2f_2(z)$ de dos funciones enteras, donde c_1 y c_2 son constantes complejas.

4. En cada caso, determinar los puntos singulares de la función y explicar por qué la función es analítica en todas partes excepto en esos puntos:

a) $\dfrac{2z + 1}{z(z^2 + 1)}$; *b)* $\dfrac{z^3 + i}{z^2 - 3z + 2}$; *c)* $\dfrac{z^2 + 1}{(z + 2)(z^2 + 2z + 2)}$.

Sol. *a)* $z = 0, \pm i$; *c)* $z = -2, -1 \pm i$.

5. De acuerdo con el Ejercicio 4*b*), Sección 19, la función

$$g(z) = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2} \qquad (r > 0, -\pi < \theta < \pi)$$

es analítica en su dominio de definición, con derivada $g'(z) = 1/[2g(z)]$. Probar que la función compuesta $g(2z - 2 + i)$ es analítica en el semiplano $x > 1$, con derivada $1/g(2z - 2 + i)$.

Sugerencia: Nótese que Re $(2z - 2 + i) > 0$ cuando $x > 1$.

6. Usar los resultados de la Sección 19 para verificar que la función

$$g(z) = \ln r + i\theta \qquad (r > 0, 0 < \theta < 2\pi)$$

es analítica en el dominio de definición que se indica, con derivada $g'(z) = 1/z$. Probar entonces que la función compuesta $g(z^2 + 1)$ es una función analítica de z en el cuadrante $x > 0$, $y > 0$, con derivada $2z/(z^2 + 1)$.

Sugerencia: Obsérvese que Im $(z^2 + 1) > 0$ cuando $x > 0$, $y > 0$.

7. Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio D. Demostrar que $f(z)$ debe ser constante en D si

a) $f(z)$ es real para todo z en D;
b) $\overline{f(z)}$ es analítica en D;
c) $|f(z)|$ es constante sobre D.

Sugerencia: Usar las ecuaciones de Cauchy-Riemann para probar *a)* y *b)*. Para probar *c)*, nótese que $\overline{f(z)} = c^2/f(z)$ si $|f(z)| = c$, donde $c \neq 0$. A continuación, usar *(b)*.

8. Demostrar que $u(x, y)$ es armónica en algún dominio y hallar una armónica conjugada $v(x, y)$, cuando

a) $u(x, y) = 2x(1 - y)$; *b)* $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$;

c) $u(x, y) = \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y$; *d)* $u(x, y) = y/(x^2 + y^2)$.

Sol. *a)* $v(x, y) = x^2 - y^2 + 2y$; *c)* $v(x, y) = -\cosh x \cos y$.

9. Probar que

a) si v y V son armónica conjugada de u en un dominio D, entonces $v(x, y)$ y $V(x, y)$ difieren a lo sumo en una constante aditiva arbitraria;

b) si $v(x, y)$ es armónica conjugada de u en un dominio D y además u es armónica conjugada de v, entonces $u(x, y)$ y $v(x, y)$ deben ser constantes en D.

10. Sea $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ una función analítica en un dominio D que no incluye al origen. Mediante las ecuaciones de Cauchy-Riemann en polares (Sec. 19) y supuestas continuas las derivadas parciales, demostrar que la función $u(r, \theta)$ satisface en D la ecuación diferencial

$$r^2 u_{rr}(r, \theta) + r u_r(r, \theta) + u_{\theta\theta}(r, \theta) = 0,$$

que es la *forma polar de la ecuación de Laplace*. Probar que lo mismo es cierto para la función $v(r, \theta)$.

11. Verificar que la función $u(r, \theta) = \ln r$ es armónica en el dominio $r > 0, 0 < \theta < 2\pi$ probando que cumple la forma polar de la ecuación de Laplace, obtenida en el Ejercicio 10. A continuación, usar la técnica del Ejemplo 3, Sección 21, pero con las ecuaciones de Cauchy-Riemann en polares (Sec. 19), para deducir la armónica conjugada $v(r, \theta) = \theta$. (Comparar con el Ej. 6).

12. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función analítica en un dominio D, y consideremos la familia de *curvas de nivel* $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$, donde c_1 y c_2 son constantes reales arbitrarias. Probar que esas familias son ortogonales. Más precisamente, demostrar que si $z_0 = (x_0, y_0)$ es un punto en D que es común a dos curvas particulares $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$ y si $f'(z_0) \neq 0$, entonces las rectas tangentes a esas curvas en (x_0, y_0) son perpendiculares.

Sugerencia: De las ecuaciones $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$ se sigue que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0.$$

13. Probar que para $f(z) = z^2$, las curvas de nivel $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$ de las funciones componentes son las hipérbolas indicadas en la Figura 25. Nótese que son ortogonales, como se describe en el Ejercicio 12. Obsérvese que las curvas $u(x, y) = 0$ y $v(x, y) = 0$ se cortan en el origen pero no son, sin embargo, ortogonales entre sí. ¿Por qué está de acuerdo este hecho con el resultado del Ejercicio 12?

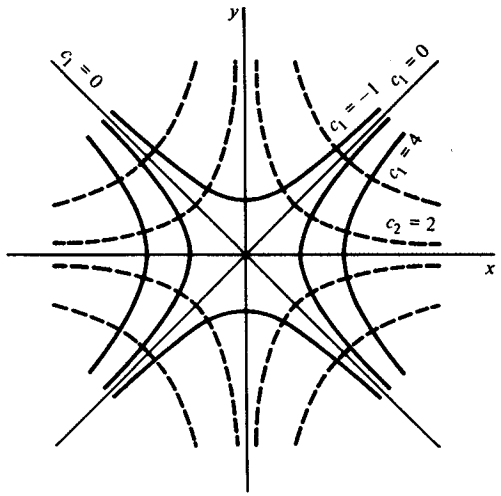


Figura 25

14. Dibujar la familia de curvas de nivel de la funciones componentes u y v para $f(z) = 1/z$, y comprobar la ortogonalidad descrita en el Ejercicio 12.

15. Rehacer el Ejercicio 14 en coordenadas polares.

16. Dibujar las familias de curvas de nivel de las funciones componentes de

$$f(z) = \frac{z - 1}{z + 1},$$

y observar cómo ilustra este caso el resultado del Ejercicio 12.

CAPITULO

TRES

FUNCIONES ELEMENTALES

Consideramos aquí varias funciones elementales estudiadas en el Cálculo y definimos funciones correspondientes de una variable compleja. Más concretamente, definimos funciones analíticas de una variable compleja z que se reducen a las funciones elementales del Cálculo real cuando $z = x + i0$. Comenzamos definiendo la función exponencial compleja y la utilizaremos después para desarrollar otras.

22. LA FUNCION EXPONENCIAL

Si una función f de una variable compleja $z = x + iy$ se ha de reducir a la función exponencial usual cuando z es real, debemos exigir que

$$f(x + i0) = e^x \qquad [1]$$

para todo número real x. Ya que $d(e^x)/dx = e^x$ para todo x real, es natural imponer las siguientes condiciones:

$$f \text{ es entera} \quad \text{y} \quad f'(z) = f(z) \quad \text{para todo } z. \qquad [2]$$

Como ya se apuntó en el Ejemplo 1 de la Sección 18, la función

$$f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y), \qquad [3]$$

con y en radianes, es diferenciable en todos los puntos del plano complejo y $f'(z) = f(z)$. Luego esa función cumple las condiciones [1] y [2]. Puede probarse además que es la única función que las satisface (véase Ej. 17, Sec. 23); y escribimos $f(z) = e^z$. A veces, por conveniencia, usamos la notación exp z en vez de e^z.

Así que la función exponencial del análisis complejo se define para todo z como

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y). \qquad [4]$$

Como ya hemos visto, se reduce a la función exponencial usual del Cálculo cuando $y = 0$, es entera, y verifica la fórmula diferencial

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z \qquad [5]$$

en todo el plano.

Nótese que como se suele asignar el valor $\sqrt[n]{e}$, o sea la raíz n-ésima *positiva* de e, a e^x cuando $x = 1/n (n = 2,3, ...)$, el valor de la función exponencial compleja e^z es también $\sqrt[n]{e}$ cuando $z = 1/n (n = 2, 3, ...)$. Esta es una excepción al convenio (Sec. 7) que nos llevaría normalmente a interpretar $e^{1/n}$ como el conjunto de todas las raíces n-ésimas de e.

Hagamos constar además que cuando z es imaginario puro, la Ecuación [4] se convierte en

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta.$$

Esta es la fórmula de Euler, introducida en la Sección 6. Por tanto, la definición dada allí del símbolo $e^{i\theta}$ coincide con la definición [4].

La forma más compacta

$$e^z = e^x e^{iy} \qquad [6]$$

de la Ecuación [4] hace muy fácil comprobar la propiedad aditiva

$$(\exp z_1)(\exp z_2) = \exp(z_1 + z_2). \qquad [7]$$

A tal fin, escribimos $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$. Entonces, a la vista de la expresión [6],

$$(\exp z_1)(\exp z_2) = (e^{x_1}e^{iy_1})(e^{x_2}e^{iy_2}) = (e^{x_1}e^{x_2})(e^{iy_1}e^{iy_2}).$$

Pero x_1 y x_2 son ambos reales, y sabemos que (Sec. 6)

$$e^{iy_1}e^{iy_2} = e^{i(y_1 + y_2)}.$$

Luego

$$(\exp z_1)(\exp z_2) = e^{(x_1 + x_2)}e^{i(y_2 + y_2)};$$

y, puesto que $(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = z_1 + z_2$, el lado derecho de esa última ecuación pasa a ser exp $(z_1 + z_2)$, de acuerdo con [6]. La propiedad [7] queda así demostrada.

Obsérvese que, como $e^{z + 2\pi i} = e^z e^{2\pi i}$ y $e^{2\pi i} = 1$, *la función exponencial es periódica con período imaginario puro de* $2\pi i$:

$$\exp (z + 2\pi i) = \exp z \text{ para todo } z. \qquad [8]$$

Se deja como ejercicio demostrar que

$$\frac{\exp z_1}{\exp z_2} = \exp (z_1 - z_2). \qquad [9]$$

De esto y del hecho de que $e^0 = 1$, se sigue $1/e^z = e^{-z}$. Otra identidad útil es

$$(\exp z)^n = \exp (nz) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...). \qquad [10]$$

23. OTRAS PROPIEDADES DE exp z

Escribamos la expresión $e^z = e^x e^{iy}$ en la Sección 22 como

$$e^z = \rho e^{i\phi}, \quad \text{donde } \rho = e^x \text{ y } \phi = y. \qquad [1]$$

El número $\rho = e^x$ es, naturalmente, positivo para cada valor de x, y de acuerdo con [1] el módulo de e^z es e^x y un argumento de e^z es y. Es decir,

$$|e^z| = e^x \text{ y } \arg (e^z) = y + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...). \qquad [2]$$

Nótese que al ser $|e^z|$ siempre positivo,

$$e^z \neq 0 \text{ para todo número complejo } z. \qquad [3]$$

Supongamos ahora que w es cualquier punto *no nulo* del plano w. Es fácil probar que hay un número infinito de puntos en el plano z que satisfacen la ecuación

$$e^z = w \qquad [4]$$

Para ello, observemos que cuando z y w se escriben $z = x + iy$ y $w = \rho e^{i\Phi} (-\pi < \Phi \leq \pi)$, la Ecuación [4] se puede poner en la forma

$$e^x e^{iy} = \rho e^{i\Phi}. \qquad [5]$$

Entonces, en vista de la afirmación en cursiva de la Sección 6 relativa a la igualdad de dos números complejos en forma exponencial, $e^x = \rho$ e $y = \Phi + 2n\pi$, donde n es cualquier entero. Como la ecuación $e^x = \rho$ es la misma que $x = \ln \rho$, se sigue que cuando $w = \rho e^{i\Phi}$ $(-\pi < \Phi \leq \pi)$, la Ecuación [4] se cumple si y sólo si z toma uno de los valores

$$z = \ln \rho + i(\Phi + 2n\pi) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...). \qquad [6]$$

Tales valores se indican a la izquierda en la Figura 26, ilustrando el hecho de que la transformación $w = \exp z$ es muchos a uno. Esa propiedad se debe, evidentemente, a la periodicidad de la función exponencial (Sec. 22).

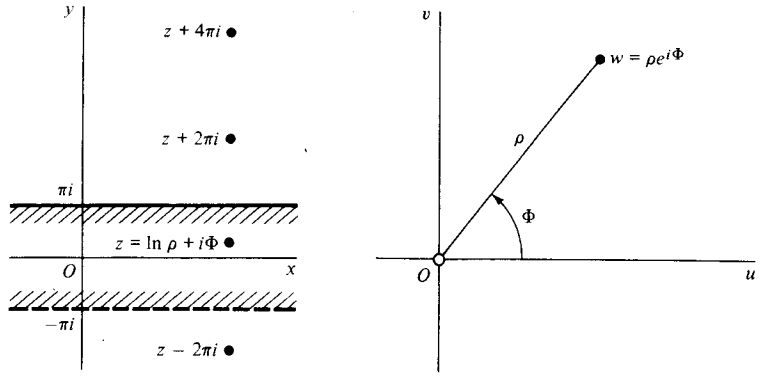


Figura 26. $w = \exp z$.

Ejemplo. Deben existir, por ejemplo, valores de z tales que $e^z = -1$. Para hallarlos, escribimos $-1 = 1e^{i\pi}$, de modo que $\rho = 1$ y $\Phi = \pi$ en la expresión [6]. Así pues, $e^z = -1$ cuando

$$z = (2n + 1)\pi i \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

La afirmación [3] nos dice que ningún valor de z satisface [4] para $w = 0$; así que es claro del párrafo precedente al ejemplo que el *recorrido de la función exponencial* $w = e^z$ *es todo el plano* w *excepto el origen* $w = 0$.

La expresión [6] nos dice además que la función

$$g(w) = \ln \rho + i\Phi \qquad (w \neq 0), \qquad [7]$$

donde $w = \rho e^{i\Phi} (-\pi < \Phi \leq \pi)$, satisface la condición $\exp [g(w)] = w$. Más aún, si un punto $z = x + iy$ está en la banda horizontal $-\pi < y \leq \pi$ (Fig. 26), e^z se puede escribir $e^z = \rho e^{i\Phi}$, donde $\rho = e^x$ y $\Phi = y$. Por tanto

$$g(e^z) = \ln (e^x) + iy = x + iy = z$$

cuando z está en dicha banda. Las funciones $g(w)$ y

$$f(z) = e^z \qquad (-\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi) \qquad [8]$$

son, por tanto, funciones inversas. Esto es, $g[f(z)] = z$ y $f[g(w)] = w$. Esto sugiere usar la Ecuación [7] para definir el logaritmo de una variable compleja, un concepto que desarrollaremos en las Secciones 26 y 27.

EJERCICIOS

1. Probar que

a) $\exp (2 \pm 3\pi i) = -e^2$; *b)* $\exp \dfrac{2 + \pi i}{4} = \sqrt{\dfrac{e}{2}} (1 + i)$;

c) $\exp (z + \pi i) = -\exp z$.

2. Explicar por qué la función $2z^2 - 3 - ze^z + e^{-z}$ es entera.

3. Hallar todos los valores de z tales que

a) $e^z = -2$; *b)* $e^z = 1 + \sqrt{3}i$; *c)* $\exp(2z - 1) = 1$.

Sol. *a)* $z = \ln 2 + (2n + 1)\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$;
c) $z = (\frac{1}{2}) + n\pi i \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

4. Expresar $|\exp(2z + i) + \exp(iz^2)|$ en términos de x e y. Probar entonces que

$$|\exp(2z + i) + \exp(iz^2)| \leqq e^{2x} + e^{-2xy}.$$

5. Demostrar que $|\exp(z^2)| \leqq \exp(|z|^2)$.

6. Demostrar que $|\exp(-2z)| < 1$ si y sólo si $\operatorname{Re} z > 0$.

7. Sea z cualquier número complejo no nulo. Demostrar que si $z = re^{i\theta}$, entonces

$$\exp(\ln r + i\theta) = z.$$

8. Describir el comportamiento de $\exp(x + iy)$ cuando *a)* x tiende a $-\infty$; *b)* y tiende a ∞.

9. Probar que

a) $\exp \bar{z} = \overline{\exp z}$ para todo z;

b) $\exp(i\bar{z}) = \overline{\exp(iz)}$ si y sólo si $z = n\pi$, donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

10. *a)* Probar que si e^z es real, entonces $\operatorname{Im} z = n\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.
b) Si e^z es imaginario puro, ¿qué restricción significa sobre z?

11. Demostrar que la función e^z no es analítica en ningún punto.

12. Probar de dos maneras que la función $\exp(z^2)$ es entera. ¿Cuál es su derivada?

Sol. $2z \exp(z^2)$.

13. Expresar $\operatorname{Re}(e^{1/z})$ en términos de x e y. ¿Por qué es armónica esta función en todo dominio que no contenga al origen?

14. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función analítica en el dominio D. Explicar por qué las funciones

$$U(x, y) = e^{u(x,y)} \cos v(x, y) \quad V(x, y) = e^{u(x,y)} \operatorname{sen} v(x, y)$$

son armónicas en D y por qué $V(x, y)$ es, de hecho, una armónica conjugada de $U(x, y)$.

15. Verificar que

$$\frac{\exp z_1}{\exp z_2} = \exp(z_1 - z_2),$$

como se afirmó en la Sección 22.

16. Establecer la identidad (Sec. 22).

$$(\exp z)^n = \exp(nz) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$$

del modo siguiente:

a) Probar, por inducción, que es válida para $n = 0, 1, 2, ...$
b) Verificarla para los enteros negativos recordando en primer lugar de la Sección 7 que $z^n = (z^{-1})^{-n}$ $(n = -1, -2, ...)$ si $z \neq 0$ y escribiendo $(\exp z)^n = (1/\exp z)^m$, donde $m = -n = 1, 2, ...$ Usar entonces el resultado de la parte *a)*, junto con la propiedad $1/e^z = e^{-z}$ (Sec. 22) de la función exponencial.

17. Supongamos que la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ satisface las condiciones [1] y [2] de la Sección 22. Seguir los pasos indicados para probar que $f(z)$ debe ser la función

$$f(z) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

a) Obtener las ecuaciones $u_x = u$, $v_x = v$ y usarlas a continuación para mostrar que existen funciones reales ϕ y ψ de la variable real y tales que

$$u(x, y) = e^x\phi(y) \quad \text{y} \quad v(x, y) = e^x\psi(y).$$

b) Usar la armonicidad de u (Sec. 21) para obtener la ecuación diferencial $\phi''(y) + \phi(y) = 0$ y mostrar así que $\phi(y) = A \cos y + B \operatorname{sen} y$, donde A y B son números reales.
c) Tras notar que $\psi(y) = A \operatorname{sen} y - B \cos y$ y que

$$u(x, 0) + iv(x, 0) = e^x,$$

hallar A y B. Concluir que

$$u(x, y) = e^x \cos y \quad \text{y} \quad v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y.$$

24. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

La fórmula de Euler (Sec. 6) nos dice que

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \operatorname{sen} x$$

para todo número real x, y de esas ecuaciones se deduce que

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \operatorname{sen} x, \quad e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x.$$

Es natural, por tanto, *definir* las funciones seno y coseno de una variable compleja z como sigue:

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \qquad [1]$$

Nótese que

$$\text{sen } (-z) = -\text{sen } z \quad \text{y} \quad \cos (-z) = \cos z. \tag{2}$$

Asimismo, cuando y es cualquier número real, podemos usar las funciones hiperbólicas

$$\text{senh } y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \quad \text{y} \quad \cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2},$$

aprendidas en el Cálculo, para escribir

$$\text{sen } (iy) = i \text{ senh } y \quad \text{y} \quad \cos (iy) = \cosh y. \tag{3}$$

Las funciones seno y coseno son enteras por ser combinaciones lineales (Ej. 3, Sec. 21) de las funciones enteras e^{iz} y e^{-iz}. Conociendo las derivadas de estas funciones exponenciales, hallamos de las ecuaciones [1] que

$$\frac{d}{dz} \text{sen } z = \cos z, \quad \frac{d}{dz} \cos z = -\text{sen } z. \tag{4}$$

Ejemplo. Para probar que

$$2 \text{ sen } z_1 \cos z_2 = \text{sen } (z_1 + z_2) + \text{sen } (z_1 - z_2), \tag{5}$$

usando las definiciones [1] y las propiedades de la función exponencial, expresamos en primer lugar

$$2 \text{ sen } z_1 \cos z_2 = 2 \left(\frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \right) \left(\frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} \right).$$

El producto reduce el miembro de la derecha a

$$\frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} + \frac{e^{i(z_1-z_2)} - e^{-i(z_1-z_2)}}{2i},$$

o sea

$$\text{sen } (z_1 + z_2) + \text{sen } (z_1 - z_2);$$

y la identidad [5] queda establecida.

A partir de la [5] se deducen las siguientes, cuya verificación dejamos como ejercicio:

$$\text{sen } (z_1 + z_2) = \text{sen } z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \text{ sen } z_2, \tag{6}$$

$$\cos (z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \text{sen } z_1 \text{ sen } z_2, \tag{7}$$

$$\text{sen}^2 z + \cos^2 z = 1, \tag{8}$$

$$\text{sen } 2z = 2 \text{ sen } z \cos z, \quad \cos 2z = \cos^2 z - \text{sen}^2 z, \tag{9}$$

$$\text{sen } \left(z + \frac{\pi}{2} \right) = \cos z. \tag{10}$$

Las partes real e imaginaria de sen z y cos z se exhiben escribiendo $z_1 = x$ y $z_2 = iy$ en las identidades [6] y [7], y consultando entonces las relaciones [3]:

$$\text{sen } z = \text{sen } x \cosh y + i \cos x \text{ senh } y \tag{11}$$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \text{ sen } x \text{ senh } y, \tag{12}$$

donde $z = x + iy$. Unas cuantas propiedades importantes de sen z y de cos z se siguen inmediatamente de esas dos últimas expresiones. Notemos, por ejemplo, que sen z bar y cos z bar son los conjugados de sen $\bar{z}$ y cos $\bar{z}$, respectivamente. El carácter periódico de sen z y de cos z es también evidente:

$$\text{sen } (z + 2\pi) = \text{sen } z, \qquad \text{sen } (z + \pi) = -\text{sen } z, \tag{13}$$

$$\cos (z + 2\pi) = \cos z, \qquad \cos (z + \pi) = -\cos z \tag{14}$$

Con ayuda de las expresiones [11] y [12], el lector puede probar que

$$|\text{sen } z|^2 = \text{sen}^2 x + \text{senh}^2 y, \tag{15}$$

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \text{senh}^2 y. \tag{16}$$

Es claro de esas dos ecuaciones que sen z y cos z no están acotadas en valor absoluto, mientras que los valores absolutos de sen x y de cos x son menores o iguales que la unidad para todo número real x.

Un valor de z para el cual $f(z) = 0$ se llama un *cero* de la función f. Los ceros de las funciones seno y coseno son todos reales. En efecto,

$$\text{sen } z = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad z = n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{17}$$

y

$$\cos z = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad z = (n + \tfrac{1}{2})\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{18}$$

Comprobemos primero [17]. Está claro que sen $z = 0$ si $z = n\pi$, porque sen z se convierte en el seno usual del Cálculo para z real. Para probar que no hay más ceros de sen z, supongamos que sen $z = 0$ y observemos cómo de la Ecuación [15] se desprende que

$$\text{sen}^2 x + \text{senh}^2 y = 0.$$

Así pues,

$$\text{sen } x = 0 \quad \text{y} \quad \text{senh } y = 0.$$

Evidentemente, pues, $x = n\pi$ e $y = 0$; es decir, $z = n\pi$. En cuanto al [18], referimos ahora a la identidad [10] para concluir que $\cos z = 0$ si y sólo si $z = (-\pi/2) + n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Este conjunto de valores de z es, obviamente, el mismo que el de la afirmación [18].

Las otras cuatro funciones trigonométricas se definen en términos del seno y del coseno por las relaciones usuales:

$$\tan z = \frac{\text{sen } z}{\cos z}, \quad \text{ctg } z = \frac{\cos z}{\text{sen } z}, \qquad [19]$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \text{cosec } z = \frac{1}{\text{sen } z}.$$

Hagamos notar que $\tan z$ y $\sec z$ son analíticas en todas partes excepto en las singularidades (Sec. 20) $z = (n + \frac{1}{2})\pi (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, que son los ceros de $\cos z$. Un argumento similar puede hacerse sobre $\text{ctg } z$ y $\text{cosec } z$. Derivando el lado derecho de [19], obtenemos las fórmulas de derivación

$$\frac{d}{dz}\tan z = \sec^2 z, \quad \frac{d}{dz}\text{ctg } z = -\text{cosec}^2 z, \qquad [20]$$

$$\frac{d}{dz}\sec z = \sec z \tan z, \quad \frac{d}{dz}\text{cosec } z = -\text{cosec } z \text{ ctg } z.$$

La periodicidad de cada una de las funciones trigonométricas definidas por las ecuaciones [19] se sigue fácilmente de [13] y [14]. Por ejemplo,

$$\tan (z + \pi) = \tan z. \qquad [21]$$

Las propiedades de la transformación $w = \text{sen } z$ son especialmente importantes en las aplicaciones posteriores. El lector que desee en este momento aprender algunas de ellas está suficientemente preparado para leer la Sección 69 (Cap. 7), donde se discuten.

EJERCICIOS

1. *a*) Verificar en detalle las expresiones [4] de la Sección 24 para las derivadas de $\text{sen } z$ y $\cos z$.

b) Sea $f(z)$ una función analítica en el dominio D. Explicar por qué las funciones $\text{sen } f(z)$ y $\cos f(z)$ son analíticas allí. Escribiendo $w = f(z)$, argumentar por qué

$$\frac{d}{dz}\text{sen } w = \cos w \frac{dw}{dz}, \quad \frac{d}{dz}\cos w = -\text{sen } w \frac{dw}{dz}.$$

2. Probar que $e^{iz} = \cos z + i \text{ sen } z$ para todo número complejo z.

3. *a*) En la Sección 24, intercambiar z_1 y z_2 en [5] y sumar entonces los miembros correspondientes de la ecuación resultante y de la Ecuación [5], para deducir la expresión [6] para $\text{sen } (z_1 + z_2)$.

b) Derivando cada miembro de la Ecuación [6] en la Sección 24, con respecto a z_1, verificar la expresión [7] de esa sección para $\cos (z_1 + z_2)$.

4. Mostrar cómo se deduce cada identidad trigonométrica [8], [9] y [10] de la Sección 24 de una de las identidades [6] y [7] de esa misma sección.

5. Usar la identidad [8] de la Sección 24 para probar que

a) $1 + \tan^2 z = \sec^2 z$; *b*) $1 + \text{ctg}^2 z = \text{cosec}^2 z$.

6. Establecer las fórmulas de derivación [20], Sección 24.

7. Deducir [15], Sección 24, para $|\text{sen } z|^2$ y usarla entonces para probar que $|\text{sen } z| \geqslant |\text{sen } x|$.

8. Deducir la expresión [16], Sección 24, para $|\cos z|^2$ y usarla entonces para demostrar que $|\cos z| \geqq |\cos x|$.

9. Con ayuda de [15] y [16], Sección 24, para $|\text{sen } z|^2$ y $|\cos z|^2$, probar que

a) $|\text{senh } y| \leqq |\text{sen } z| \leqq \cosh y$; *b*) $|\text{senh } y| \leqq |\cos z| \leqq \cosh y$.

10. *a*) Usar las definiciones [1], Sección 24, de $\text{sen } z$ y $\cos z$ para probar que

$$2 \text{ sen } (z_1 + z_2) \text{ sen } (z_1 - z_2) = \cos 2z_2 - \cos 2z_1.$$

b) Mediante la identidad obtenida en el apartado *a*), probar que si $\cos z_1 = \cos z_2$, entonces al menos uno de los números $z_1 + z_2$ y $z_1 - z_2$ es un múltiplo entero de 2π.

11. Probar que $\text{sen } \bar{z}$ y $\cos \bar{z}$ no son funciones analíticas en ningún punto z.

12. Probar que

a) $\cos (i\bar{z}) = \overline{\cos (iz)}$ para todo z;

b) $\text{sen } (i\bar{z}) = \overline{\text{sen } (iz)}$ si y sólo si $z = n\pi i$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

13. Demostrar de dos maneras que cada una de estas funciones es armónica en todo el plano:

a) $\text{sen } x \text{ senh } y$; *b*) $\cos 2x \text{ senh } 2y$.

14. Hallar todas las raíces de la ecuación $\text{sen } z = \cosh 4$, igualando sus partes reales e imaginarias.

Sol. $(2n + \frac{1}{2})\pi \pm 4i$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

15. Hallar todas las raíces de la ecuación $\cos z = 2$.

Sol. $2n\pi + i \cosh^{-1} 2$; esto es, $2n\pi \pm i \ln (2 + \sqrt{3})$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

25. FUNCIONES HIPERBOLICAS

El seno y el coseno hiperbólicos de una variable compleja se definen como en una variable real, es decir,

$$\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}. \qquad [1]$$

Como e^z y e^{-z} son enteras, se sigue de [1] que senh z y cosh z son enteras. Además,

$$\frac{d}{dz}\operatorname{senh} z = \cosh z, \quad \frac{d}{dz}\cosh z = \operatorname{senh} z. \qquad [2]$$

Debido a la manera en que la función exponencial aparece en las definiciones [1] y en las definiciones (Sec. 24)

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

de sen z y cos z, las funciones seno y coseno hiperbólicas están estrechamente relacionadas a las funciones trigonométricas:

$$-i \operatorname{senh}(iz) = \operatorname{sen} z, \quad \cosh(iz) = \cos z \qquad [3]$$

$$-i \operatorname{sen}(iz) = \operatorname{senh} z, \quad \cos(iz) = \cosh z \qquad [4]$$

Diversas identidades en las funciones seno y coseno hiperbólicas, que se siguen directamente de las definiciones [1], se deducen más fácilmente de propiedades ya conocidas de sen z y cos z, con ayuda de las relaciones [3] y [4]. Algunas de las identidades más útiles son

$$\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh} z, \quad \cosh(-z) = \cosh z, \qquad [5]$$

$$\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1, \qquad [6]$$

$$\operatorname{senh}(z_1 + z_2) = \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \operatorname{senh} z_2, \qquad [7]$$

$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2 \qquad [8]$$

y

$$\operatorname{senh} z = \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y \qquad [9]$$

$$\cosh z = \cosh x \cos y + i \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y, \qquad [10]$$

$$|\operatorname{senh} z|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \operatorname{sen}^2 y \qquad [11]$$

$$|\cosh z|^2 = \operatorname{senh}^2 x + \cos^2 y, \qquad [12]$$

donde $z = x + iy$.

Ejemplo. Para ilustrar el método de demostración sugerido, vamos a verificar la identidad [11]. Según la primera de las relaciones [4], $|\operatorname{senh} z|^2 = |\operatorname{sen}(iz)|^2$. Es decir,

$$|\operatorname{senh} z|^2 = |\operatorname{sen}(-y + ix)|^2, \qquad [13]$$

donde $z = x + iy$. Pero por [15], Sección 24, sabemos que

$$|\operatorname{sen}(x + iy)|^2 = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y;$$

y eso nos capacita para escribir la Ecuación [13] en la forma deseada [11].

En vista de la periodicidad de sen z y de cos z, se desprende inmediatamente de las relaciones [4] que senh z y cosh z son periódicas con período $2\pi i$. Además, los ceros de senh z son $z = n\pi i$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); y los de cosh z son $z = (n + \frac{1}{2})\pi i$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

La tangente hiperbólica de z se define por la ecuación

$$\operatorname{tgh} z = \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z} \qquad [14]$$

y es analítica en todo dominio en que $\cosh z \neq 0$. Las funciones ctgh z, sech z y cosech z son las recíprocas de tgh z, cosh z, y senh z, respectivamente. Se comprueba de forma rutinaria la validez de las siguientes fórmulas de derivación, que son las mismas que las vistas en Cálculo para las correspondientes funciones de una variable real:

$$\frac{d}{dz}\operatorname{tgh} z = \operatorname{sech}^2 z, \quad \frac{d}{dz}\operatorname{ctgh} z = -\operatorname{cosh}^2 z, \qquad [15]$$

$$\frac{d}{dz}\operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z \operatorname{tgh} z, \quad \frac{d}{dz}\operatorname{cosech} z = -\operatorname{cosech} z \operatorname{ctgh} z \qquad [16]$$

EJERCICIOS

1. Comprobar las derivadas de sen z y cosh z anunciadas en las ecuaciones [2], Sección 25.

2. Demostrar que $\operatorname{senh} 2z = 2 \operatorname{senh} z \cosh z$ partiendo de
   a) Las definiciones [1], Sección 25, de senh z y cosh z.
   b) La identidad $\operatorname{sen} 2z = 2 \operatorname{sen} z \cos z$ (Sec. 24) y usando las relaciones [3] de la Sección 25.

3. Mostrar cómo se siguen las identidades [6] y [8] de la Sección 25 de las identidades [8] y [7], respectivamente, de la Sección 24.

4. Escribir senh $z = \text{senh}\,(x + iy)$ y $\cosh z = \cosh\,(x + iy)$, y mostrar cómo se siguen [9] y [10], Sección 25, de las identidades [7] y [8], respectivamente, de esa sección.

5. Comprobar que $\text{senh}(z + \pi i) = -\text{senh}\, z$ y $\cosh\,(z + \pi i) = -\cosh z$. A continuación, probar que

$$\text{tgh}\,(z + \pi i) = \text{tgh}\, z.$$

6. Verificar la expresión [12], Sección 25, para $|\cosh z|^2$.

7. Probar que $|\text{senh}\, x| \leqq |\cosh z| \leqq \cosh x$ usando *a)* la identidad [12], Sección 25; *b)* las desigualdades obtenidas en el Ejercicio 9*b*), Sección 24.

8. Comprobar que los ceros de senh z y de cosh z son los indicados en la Sección 25.

9. Utilizando los resultados probados en el Ejercicio 8, localizar todos los ceros y las singularidades de la función tangente hiperbólica.

10. Deducir las fórmulas de derivación [15], Sección 25.

11. Hallar todas las raíces de las ecuaciones

a) $\cosh z = \frac{1}{2}$; *b)* $\text{senh}\, z = i$; *c)* $\cosh z = -2$.

Sol. *a)* $(2n \pm \frac{1}{3})\pi i$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; *b)* $(2n + \frac{1}{2})\pi i$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

12. ¿Por qué es entera la función senh (e^z)? Escribir su parte real como función de x e y, y explicar por qué esa función debe ser armónica en todas partes.

26. LA FUNCION LOGARITMO Y SUS RAMAS

Sabemos por la Sección 23 que para cualquier número no nulo dado $w = \rho e^{i\Phi}(-\pi < \Phi \leqq \pi)$, la ecuación $e^z = w$ tiene raíces

$$z = \ln \rho + i(\Phi + 2n\pi) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Luego, si escribimos

$$\log w = \ln \rho + i(\Phi + 2n\pi) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad [1]$$

vemos que $\exp(\log w) = w$; esto motiva la siguiente definición de la función logaritmo (multivaluada) de una variable compleja.

La función logaritmo se define en los puntos no nulos $z = re^{i\Theta}$ $(-\pi < \Theta \leqq \pi)$ *del plano* z como

$$\log z = \ln r + i(\Theta + 2n\pi) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad [2]$$

El *valor principal* de $\log z$ es el valor obtenido en la Ecuación [2] cuando $n = 0$, y se denota por Log z. Así pues,

$$\text{Log}\, z = \ln r + i\Theta, \qquad [3]$$

o sea

$$\text{Log}\, z = \ln |z| + i\, \text{Arg}\, z \qquad (z \neq 0). \qquad [4]$$

Nótese que

$$\log z = \text{Log}\, z + 2n\pi i \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

La función Log z está evidentemente bien definida y es univaluada cuando $z \neq 0$. Se reduce al logaritmo natural usual del Cálculo cuando z es un número real positivo $z = r$. Para verlo, basta escribir $z = re^{i\theta}$, en cuyo caso la Ecuación [3] se convierte en Log $z = \ln r$; esto es, Log $r = \ln r$.

Ejemplo. Partiendo de [2] encontramos que

$$\log 1 = 2n\pi i \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

y

$$\log (-1) = (2n + 1)\pi i \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

En particular, Log $1 = 0$ y Log $(-1) = \pi i$.

Si z es un número complejo no nulo, con forma exponencial $z = re^{i\theta}$, entonces θ toma uno de los valores $\theta = \Theta + 2n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; donde $\Theta = \text{Arg}\, z$. Por tanto, la Ecuación [2] es expresable en la forma

$$\log z = \ln r + i\theta. \qquad [5]$$

Esto es,

$$\log z = \ln |z| + i \arg z \qquad (z \neq 0). \qquad [6]$$

Si α denota cualquier número real, y restringimos los valores de θ en la expresión [5] al intervalo $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$, la función

$$\log z = \ln r + i\theta \qquad (r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi), \qquad [7]$$

con funciones componentes

$$u(r, \theta) = \ln r \quad \text{y} \quad v(r, \theta) = \theta, \qquad [8]$$

es univaluada y continua en el dominio antedicho (Fig. 27). Nótese que si la función [7] hubiera de definirse sobre el rayo $\theta = \alpha$, no sería continua en él. Porque si z es un punto del rayo, hay puntos arbitrariamente cercanos al z en los que los valores de v están próximos a α y también otros en los que los valores de v están próximos a $\alpha + 2\pi$.

La función [7] no sólo es continua sino analítica en el dominio $r > 0$, $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$, pues las primeras derivadas de u y de v son continuas allí y satisfacen la forma polar (Sec. 19)

$$u_r = \frac{1}{r} v_\theta, \quad \frac{1}{r} u_\theta = -v_r$$

de las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Además, de acuerdo con la Sección 19,

$$\frac{d}{dz} \log z = e^{-i\theta}(u_r + iv_r) = e^{-i\theta}\left(\frac{1}{r} + i0\right) = \frac{1}{re^{i\theta}};$$

es decir,

$$\frac{d}{dz} \log z = \frac{1}{z} \qquad (|z| > 0, \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi). \qquad [9]$$

En particular,

$$\frac{d}{dz} \operatorname{Log} z = \frac{1}{z} \qquad (|z| > 0, -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi). \qquad [10]$$

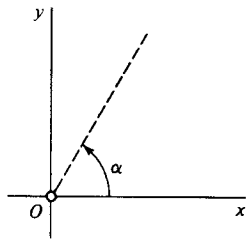


Figura 27

Una *rama* (o *determinación*) de una función multivaluada f es cualquier función univaluada F que sea analítica en algún dominio en cada punto z del cual el valor $F(z)$ es uno de los valores $f(z)$. El requisito de analiticidad evita que se tomen al azar valores de f para definir la F. Nótese que para cada α fijo, la función univaluada [7] es una rama de la función multivaluada [5]. La función

$$\operatorname{Log} z = \ln r + i\Theta \qquad (r > 0, -\pi < \Theta < \pi) \qquad [11]$$

se llama la *rama principal*.

Un *corte* (*de ramificación*) es una porción de recta o de curva que se escoge con objeto de definir una rama F de una función multivaluada f. Los puntos sobre el corte de F son puntos singulares (Sec. 20) de F, y cualquier punto que es común a todos los cortes de f se llama un *punto de ramificación*. El origen y el rayo $\theta = \alpha$ constituyen el corte para la rama [7] de la función logaritmo. El corte

para la rama principal [11] consta del origen y del rayo $\Theta = \pi$. El origen es evidentemente un punto de ramificación de la función logaritmo.

27. OTRAS PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

Varias identidades relativas a los logaritmos naturales de los números reales positivos son válidas, con ciertas modificaciones, para los números complejos.

En primer lugar, sabemos desde el comienzo de la Sección 26 que

$$\exp(\log z) = z \qquad (z = 0), \qquad [1]$$

sea cual sea el valor de $\log z$ que escojamos tras especificar z. *No* es cierto, sin embargo, que $\log(e^z)$ sea siempre igual a z. Esto es evidente del hecho de que $\log(e^z)$ tiene infinitos valores para cada z dado. Concretamente, como (Sec. 23)

$$|e^z| = e^x \quad \text{y} \quad \arg(e^z) = y + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

si $z = x + iy$, vemos que

$$\log(e^z) = \ln|e^z| + i \arg(e^z) = x + i(y + 2n\pi),$$

o sea

$$\log(e^z) = z + 2n\pi i \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad [2]$$

Ahora bien, si el número $z = x + iy$ se restringe a la franja horizontal $-\pi < y \leqq \pi$ y se toman valores principales de la función logaritmo, vemos que

$$\operatorname{Log}(e^z) = \ln|e^z| + i \operatorname{Arg}(e^z) = x + iy.$$

Así pues,

$$\operatorname{Log}(e^z) = z \qquad (-\pi < \operatorname{Im} z \leqq \pi). \qquad [3]$$

[Comparar con el último párrafo de la Sección 23, donde la función $g(w)$ es, de hecho, Log w.]

Sean ahora z_1 y z_2 dos números complejos no nulos. Es sencillo ver que

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2. \qquad [4]$$

Esta afirmación, en la que aparece una función multivaluada, ha de ser interpretada del mismo modo que la igualdad

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \qquad [5]$$

de la Sección 5. Esto es, si se especifican valores de dos de los tres logaritmos involucrados, existe un valor del tercero que satisface la igualdad [4].

La demostración de [4] se puede basar en [5] de la siguiente manera. Como $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ y estos módulos son todos números reales positivos, sabemos por nuestra experiencia con logaritmos en el Cálculo que

$$\ln |z_1 z_2| = \ln |z_1| + \ln |z_2|.$$

De esto y de la Ecuación [5] se sigue que

$$\ln |z_1 z_2| + i \arg (z_1 z_2) = (\ln |z_1| + i \arg z_1) + (\ln |z_2| + i \arg z_2). \quad [6]$$

Finalmente, debido a la forma en que han de interpretarse [4] y [5], la Ecuación [6] es lo mismo que la Ecuación [4].

Análogamente, se puede demostrar que

$$\log \left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log z_2. \quad [7]$$

Ejemplo. Para ilustrar la igualdad [4], escribamos $z_1 = z_2 = -1$, con lo que $z_1 z_2 = 1$. Si se especifican los valores $\log z_1 = \pi i$ y $\log z_2 = -\pi i$, la Ecuación [4] se satisface obviamente cuando se elige el valor $\log (z_1 z_2) = 0$.

Nótese que, para los mismos números z_1 y z_2,

$$\text{Log } (z_1 z_2) = 0 \quad \text{y} \quad \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2 = 2\pi i.$$

Así que la igualdad [4] no es válida, en general, cuando log se sustituye en todas partes por *Log*. Una observación similar se aplica a [7].

Incluiremos aquí otras dos propiedades de log z que serán de especial interés en la Sección 28. Si z es un número complejo no nulo, entonces

$$z^n = \exp (n \log z) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \quad [8]$$

para cualquier valor de log z que se escoja. Esto es, claro está, una generalización de la identidad (1) y se deduce de ella recordando (Sec. 22) la propiedad $(\exp z)^n = \exp (nz)$ de la función exponencial.

Es también cierto que cuando $z \neq 0$,

$$z^{1/n} = \exp \left(\frac{1}{n} \log z\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \quad [9]$$

Es decir, el término de la derecha toma n valores distintos, y esos valores son las raíces n-ésimas de z. Para probarlo, escribamos $z = r \exp (i\Theta)$, donde Θ es el valor principal de arg z. Entonces, a la vista de [2], Sec. 26, para log z,

$$\exp \left(\frac{1}{n} \log z\right) = \exp \left[\frac{1}{n} \ln r + \frac{i(\Theta + 2k\pi)}{n}\right],$$

como $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Así pues,

$$\exp \left(\frac{1}{n} \log z\right) = \sqrt[n]{r} \exp \left[i\left(\frac{\Theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right] \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \quad [10]$$

Como $\exp (i2k\pi/n)$ tiene valores distintos sólo cuando $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, el miembro de la derecha de la Ecuación [10] toma sólo n valores. Ese lado derecho es, en efecto, una expresión de las raíces n-ésimas de z (Sec. 7), así que puede escribirse como $z^{1/n}$. Esto establece la propiedad [9], que es válida asimismo cuando n es un entero negativo (véase Ej. 17).

Las transformaciones por medio de la función logaritmo juegan un papel relevante en aplicaciones posteriores. El lector interesado en conocer algunas propiedades de tales transformaciones, realizadas tanto mediante la función logaritmo como mediante la función exponencial, posee ya el bagaje suficiente para leer toda la Sección 68 (Cap. 7), excepto el último ejemplo.

EJERCICIOS

1. Probar que

a) $\text{Log } (-ei) = 1 - \frac{\pi}{2} i$; *b*) $\text{Log } (1 - i) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{4} i$.

2. Comprobar que si $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

a) $\log e = 1 + 2n\pi i$; *b*) $\log i = (2n + \frac{1}{2})\pi i$;

c) $\log (-1 + \sqrt{3}\, i) = \ln 2 + 2(n + \frac{1}{3})\pi i$.

3. Probar que

$$\text{Log } (1 + i)^2 = 2 \text{ Log } (1 + i)$$

pero que

$$\text{Log } (-1 + i)^2 \neq 2 \text{ Log } (-1) + i).$$

4. Probar que

a) si $\log z = \ln r + i\theta (r > 0, \pi/4 < \theta < 9\pi/4)$, entonces $\log (i^2) = 2 \log i$;
b) si $\log z = \ln r + i\theta (r > 0, 3\pi/4 < \theta < 11\pi/4)$, entonces $\log (i^2) \neq 2 \log i$.

5. Probar que

a) el conjunto de valores de $\log (i^{1/2})$ es $(n + \frac{1}{4})\pi i$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ y lo mismo es cierto para $\frac{1}{2} \log i$;
b) el conjunto de valores de $\log (i^2)$ *no* es el mismo que el de $2 \log i$.

6. Sabiendo que la rama $\log z = \ln r + i\theta (r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi)$ de la función logaritmo es analítica en todo punto z del dominio indicado, hallar su derivada mediante derivación de ambos lados de la identidad $\exp (\log z) = z$ (Sec. 27) y usando la regla de la cadena.

7. Hallar todas las raíces de la ecuación $\log z = (\pi/2)i$.

Sol. $z = i$.

8. Supongamos que el punto $z = x + iy$ está en la banda horizontal $\alpha < y < \alpha + 2\pi$. Probar que cuando se usa la rama $\log z = \ln r + i\theta (r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi)$ de la función logaritmo, $\log (e^z) = z$.

9. Demostrar que si $\operatorname{Re} z_1 > 0$ y $\operatorname{Re} z_2 > 0$, entonces

$$\operatorname{Log} (z_1 z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2.$$

10. Probar que para todo par de números complejos no nulos z_1 y z_2,

$$\operatorname{Log} (z_1 z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 + 2N\pi i$$

donde N tiene alguno de los valores $0, \pm 1$.

11. Verificar la expresión [7], Sección 27, para $\log (z_1/z_2)$.

a) usando el hecho de que $\arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2$ (Sec. 5);
b) mostrando primero que $\log (1/z) = -\log z (z \neq 0)$, en el sentido de que $\log (1/z)$ y $-\log z$ tienen el mismo conjunto de valores, y usando entonces la expresión [4], Sección 27, para $\log (z_1 z_2)$.

12. Eligiendo valores concretos no nulos de z_1 y z_2, probar que la expresión [7], Sección 27, para $\log (z_1/z_2)$ no es válida siempre si *log* se sustituye por *Log*.

13. Verificar la identidad [8], Sección 27, escribiendo $z = re^{i\theta}$ en el lado derecho.

14. Probar que

a) la función $\operatorname{Log}(z - i)$ es analítica en todas partes, excepto en la semirrecta $y = 1 (x \leqq 0)$;
b) la función

$$\frac{\operatorname{Log} (z + 4)}{z^2 + i}$$

es analítica en todas partes salvo en los puntos $\pm(1 - i)/\sqrt{2}$ y en la porción $x \leqq -4$ del eje real.

15. Demostrar de dos maneras distintas que la función $\ln (x^2 + y^2)$ es armónica en todo dominio que no contenga al origen.

16. Probar que

$$\operatorname{Re} [\log (z - 1)] = \tfrac{1}{2} \ln [(x - 1)^2 + y^2] \qquad (z \neq 1).$$

¿Por qué debe cumplir esta función la ecuación de Laplace cuando $z \neq 1$?

17. Demostrar que la propiedad [9], Sección 27, sigue siendo válida para enteros n negativos. Escribir, a tal fin, $z^{1/n} = (z^{1/m})^{-1}$ $(m = -n)$, donde n tiene cualquiera de los valores negativos $n = -1, -2, \ldots$ [véase Ej. 17*b*), Sec. 7], y usar que la propiedad ya es conocida para los enteros positivos.

18. Sea z un número complejo no nulo, escrito $z = re^{i\Theta} (-\pi < \Theta \leqq \pi)$, y sea n un entero positivo fijo $(n = 1, 2, \ldots)$. Probar que todos los valores de $\log (z^{1/n})$ vienen dados por la ecuación

$$\log (z^{1/n}) = \frac{1}{n} \ln r + i \frac{\Theta + 2(pn + k)\pi}{n},$$

donde $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ y $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$. Entonces, tras escribir

$$\frac{1}{n} \log z = \frac{1}{n} \ln r + i \frac{\Theta + 2q\pi}{n},$$

donde $q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, demostrar que el conjunto de valores de $\log (z^{1/n})$ es el mismo que el de los valores de $(1/n) \log z$. Así pues, probar que $\log (z^{1/n}) = (1/n) \log z$, donde, correspondiendo a un valor de $\log (z^{1/n})$ en la izquierda, ha de seleccionarse el valor apropiado de $\log z$ en la derecha, y viceversa. [El resultado del Ejercicio 5*a*) es caso especial de éste.]

Sugerencia: Usar el hecho de que el resto de la división de un entero por un entero positivo n es siempre un entero entre 0 y $n - 1$, inclusive; esto es, cuando se especifica un entero n, cualquier entero q puede escribirse $q = pn + k$, donde p es un entero y k toma uno de los valores $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

28. EXPONENTES COMPLEJOS

Cuando $z \neq 0$ y el *exponente c es cualquier número complejo*, la función z^c se define mediante la ecuación

$$z^c = \exp (c \log z), \qquad [1]$$

donde $\log z$ denota la función logaritmo multivaluada. La Ecuación [1] proporciona una definición consistente de z^c en el sentido de que la ecuación ya se sabe que es válida (Sec. 27) para $c = n (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ y $c = 1/n (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$. La definición de z^c viene, de hecho, sugerida por esas elecciones particulares de c.

Ejemplo 1. Las potencias de z son, por lo general, multivaluadas, como se ve al escribir

$$i^{-2i} = \exp (-2i \log i) = \exp[-2i(2n + \tfrac{1}{2}\pi i] = \exp[(4n + 1)\pi],$$

donde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Nótese que, como la exponencial cumple $1/e^z = e^{-z}$, los dos conjuntos de números $1/z^c$ y z^{-c} coinciden. Así que podemos escribir

$$\frac{1}{z^c} = z^{-c}; \qquad [2]$$

y en particular,

$$\frac{1}{i^{2i}} = \exp [(4n + 1)\pi] \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Si $z = re^{i\theta}$ y α es cualquier número real, la rama

$$\log z = \ln r + i\theta \qquad (r > 0, \alpha < \theta < \alpha + 2\pi)$$

de la función logaritmo es univaluada y analítica en el dominio indicado (Sec. 26). Cuando se usa esa determinación, se sigue que la función $z^c = \exp(c \log z)$ es univaluada y analítica en ese mismo dominio. La derivada de una tal *rama de* z^c se calcula poniendo

$$\frac{d}{dz} z^c = \frac{d}{dz} \exp(c \log z) = [\exp(c \log z)] \frac{c}{z} =$$

$$= c \frac{\exp(c \log z)}{\exp(\log z)} = c \exp[(c - 1) \log z]$$

y observando que el término final aquí es la función univaluada cz^{c-1}, que está definida también en el dominio $r > 0$, $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$. Es decir,

$$\frac{d}{dz} z^c = cz^{c-1} \qquad (|z| > 0, \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi) \qquad [3]$$

El *valor principal* de z^c ocurre cuando log z se sustituye por Log z en la definición [1]:

$$z^c = \exp(c \operatorname{Log} z). \qquad [4]$$

La Ecuación [4] sirve también para definir la *rama* (o determinación) *principal* de la función z^c sobre el dominio $|z| > 0$, $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$.

Ejemplo 2. El valor principal de $(-i)^i$ es

$$\exp[i \operatorname{Log}(-i)] = \exp\left[i\left(-\frac{\pi}{2} i\right)\right] = \exp\frac{\pi}{2}.$$

Ejemplo 3. La rama principal de $z^{2/3}$ se puede expresar

$$\exp\left(\frac{2}{3} \operatorname{Log} z\right) = \exp\left(\frac{2}{3} \ln r + \frac{2}{3} i\Theta\right) = \sqrt[3]{r^2} \exp\left(\frac{i2\Theta}{3}\right).$$

Es analítica en el dominio $r > 0$, $-\pi < \Theta < \pi$, como puede verse directamente del teorema de la Sección 19.

De acuerdo con la definición [1], *la función exponencial con base c*, donde c es cualquier número complejo no nulo, se escribe

$$c^z = \exp(z \log c). \qquad [5]$$

Nótese que aunque e^z es en general multivaluada, según la definición [5], la interpretación usual de e^z coincide con la elección del valor principal del logaritmo. Porque $\exp(z \operatorname{Log} e) = e^z$, siendo el valor principal de log e igual a la unidad.

Cuando se especifica un valor de log c, c^z es una función entera de z. En efecto,

$$\frac{d}{dz} c^z = \frac{d}{dz} \exp(z \log c) = [\exp(z \log c)] \log c;$$

y esto demuestra que

$$\frac{d}{dz} c^z = c^z \log c. \qquad [6]$$

29. FUNCIONES TRIGONOMETRICAS E HIPERBOLICAS INVERSAS

Las inversas de las funciones trigonométricas e hiperbólicas pueden describirse en términos de logaritmos.

Para definir $\operatorname{sen}^{-1} z$, la función inversa del seno, escribimos $w = \operatorname{sen}^{-1} z$, donde $z = \operatorname{sen} w$. Es decir, $w = \operatorname{sen}^{-1} z$ cuando

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}.$$

Pongamos esta ecuación en la forma

$$(e^{iw})^2 - 2iz(e^{iw}) - 1 = 0,$$

que es cuadrática en e^{iw}. Despejando e^{iw} [véase Ej. 20*a*), Sec. 7], encontramos que

$$e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{1/2}, \qquad [1]$$

donde $(1 - z^2)^{1/2}$ es, naturalmente, una función bivaluada de z. Tomando logaritmos en cada lado de la Ecuación [1] y recordando que $w = \operatorname{sen}^{-1} z$, llegamos a la expresión

$$\operatorname{sen}^{-1} z = -i \log[iz + (1 - z^2)^{1/2}]. \qquad [2]$$

El próximo ejemplo ilustra el hecho de que $w = \operatorname{sen}^{-1} z$ es multivaluada, con infinitos valores en cada punto z.

Ejemplo. La expresión [2] nos dice que

$$\operatorname{sen}^{-1}(-i) = -i \log(1 \pm \sqrt{2}).$$

Ahora bien

$$\log (1 + \sqrt{2}) = \ln (1 + \sqrt{2}) + 2n\pi i \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

y

$$\log (1 - \sqrt{2}) = \ln (\sqrt{2} - 1) + (2n + 1)\pi i \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

Ya que

$$\ln (\sqrt{2} - 1) = \ln \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = -\ln (1 + \sqrt{2}),$$

entonces, los números

$$(-1)^n \ln (1 + \sqrt{2}) + n\pi i \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

constituye el conjunto de valores de $\log (1 \pm \sqrt{2})$. Luego

$$\text{sen}^{-1} (-i) = n\pi + i(-1)^{n+1} \ln (1 + \sqrt{2}) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

Puede aplicarse la técnica utilizada al deducir la expresión [2] para $w = \text{sen}^{-1} z$, para demostrar que

$$\cos^{-1} z = -i \log [z + i(1 - z^2)^{1/2}] \qquad [3]$$

y que

$$\text{tg}^{-1} z = \frac{i}{2} \log \frac{i + z}{i - z}. \qquad [4]$$

Las funciones $\cos^{-1} z$ y $\text{tg}^{-1} z$ también son multivaluadas. Si se usan ramas específicas de las funciones raíz cuadrada y logaritmo, las tres funciones inversas pasan a ser univaluadas y analíticas, puesto que son entonces composiciones de funciones analíticas.

Las derivadas de esas tres funciones se hallan con facilidad de las expresiones anteriores. Las derivadas de las dos primeras dependen de los valores elegidos para las raíces cuadradas:

$$\frac{d}{dz} \text{sen}^{-1} z = \frac{1}{(1 - z^2)^{1/2}}, \qquad [5]$$

$$\frac{d}{dz} \cos^{-1} z = \frac{-1}{(1 - z^2)^{1/2}}. \qquad [6]$$

La derivada de la tercera,

$$\frac{d}{dz} \text{tg}^{-1} z = \frac{1}{1 + z^2}, \qquad [7]$$

no depende, sin embargo, de la forma en que se haga univaluada a la función. Resulta ser

$$\text{senh}^{-1} z = \log [z + (z^2 + 1)^{1/2}], \qquad [8]$$

$$\cosh^{-1} z = \log [z + (z^2 - 1)^{1/2}], \qquad [9]$$

y

$$\text{tgh}^{-1} z = \frac{1}{2} \log \frac{1 + z}{1 - z}. \qquad [10]$$

Finalmente, hagamos notar que otra notación frecuente para las funciones inversas es arcsen z, etc.

EJERCICIOS

1. Probar que cuando $n = \text{p}, \pm 1, \pm 2, ...,$

a) $(1 + i)^i = \exp [(-\pi/4) + 2n\pi] \exp [(i/2) \ln 2]$;
b) $(-1)^{1/\pi} = \exp [2n + 1)i]$.

2. Hallar el valor principal de

a) i^i; *b)* $[(e/2)(-1 - \sqrt{3}\, i)]^{3\pi i}$; *c)* $(1 - i)^{4i}$.

Sol. *a)* $\exp (-\pi/2)$; *b)* $-\exp (2\pi^2)$; *c)* $e^{\pi}[\cos (2 \ln 2) + i \text{ sen } (2 \ln 2)]$.

3. Usar la definición [1], Sección 28, de z^c para verificar que $(-1 + \sqrt{3}i)^{3/2} = \pm 2\sqrt{2}$.

4. Demostrar que el resultado del Ejercicio 3 se puede obtener escribiendo

a) $(-1 + \sqrt{3}\, i)^{3/2} = [(-1 + \sqrt{3}\, i)^{1/2}]^3$ y hallando primero las raíces cuadradas de $-1 + \sqrt{3}i$;
b) $(-1 + \sqrt{3}i)^{3/2} = [(-1 + \sqrt{3}i)^3]^{1/2}$ y elevando primero al cubo $-1 + \sqrt{3}i$.

5. Probar que la *raíz n-ésima principal* de un número complejo no nulo z_0, definida en la Sección 7, coincide con el valor principal de $z_0^{1/n}$, definido en la Sección 28.

6. Probar que si $z \neq 0$ y a es un número real, entonces $|z^a| = \exp (a \ln |z|) = |z|^a$, donde se toma el valor principal de $|z|^a$.

7. Sea $c = a + bi$ un número complejo fijo, con $c \neq 0, \pm 1, \pm 2, ...$, y nótese que i^c es multivaluada. ¿Qué restricciones hay que imponer sobre la constante c para que los valores de $|i^c|$ sean todos iguales?

Sol. c ha de ser real.

8. Sean c, d y z números complejos, con $z \neq 0$. Demostrar que si todas las potencias implicadas son valores principales, entonces

a) $1/z^c = z^{-c}$; *b)* $(z^c)^n = z^{cn}$ $(n = 1, 2, ...)$; *c)* $z^c z^d = z^{c+d}$; *d)* $z^c/z^d = z^{c-d}$.

9. Usando la rama principal de z^i, hallar las funciones $u(r, \theta)$ y $v(r, \theta)$ cuando

$$z^i = u(r, \theta) + iv(r, \theta).$$

10. Supuesto que existe $f'(z)$, establecer la fórmula de derivación para $d[c^{f(z)}]/dz$.

11. Hallar todos los valores de

a) $\text{tg}^{-1}(2i)$; *b)* $\tan^{-1}(1 + i)$; *c)* $\cosh^{-1}(-1)$; *d)* $\text{tgh}^{-1}0$.

Sol. *a)* $\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{i}{2} \ln 3$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$;

d) $n\pi i$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

12. Resolver la ecuación $\text{sen } z = 2$

a) igualando las partes real e imaginaria de cada lado.
b) usando la expresión [2], Sección 29, para $\text{sen}^{-1} z$.

Sol. $(2n + \frac{1}{2})\pi \pm i \ln (2 + \sqrt{3})$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$.

13. Resolver la ecuación $\cos z = \sqrt{2}$.

14. Deducir la fórmula [5], Sección 29, para la derivada de $\text{sen}^{-1} z$.

15. Deducir la expresión [4], Sección 29, para $\text{tg}^{-1} z$.

16. Deducir la fórmula [7], Sección 29, para la derivada de $\text{tg}^{-1} z$.

17. Deducir la expresión [9], Sección 29, para $\cosh^{-1} z$.

CAPITULO

CUATRO

INTEGRALES

Las integrales son muy importantes en el estudio de funciones de una variable compleja. La teoría de integración que desarrollaremos en este capítulo es notable por su elegancia matemática. Los teoremas son, en general, concisos y potentes, y sus demostraciones muy sencillas casi siempre. La teoría tiene, además, múltiples aplicaciones en Matemáticas Aplicadas.

En lector podría pasar en este momento directamente al Capítulo 7, que trata la forma en que diversas curvas y regiones se transforman, bajo funciones elementales, del plano z al plano w. Ello conduciría más rápidamente a un tipo especial de información (Cap. 8) que es útil en la resolución de ciertos problemas físicos (Cap. 9). Debemos advertir, no obstante, que en el Capítulo 8 hay varias referencias a este capítulo.

30. FUNCIONES COMPLEJAS $w(t)$

Con objeto de introducir las integrales de $f(z)$ de un modo sencillo, consideremos primero derivadas e integrales de funciones complejas $w(t)$ de una variable real t. Escribimos

$$w(t) = u(t) + iv(t), \qquad [1]$$

donde las funciones u y v son funciones *reales* de t.

La derivada $w'(t)$, o $d[w(t)]/dt$, de la función [1] en un punto t se define como

$$w'(t) = u'(t) + iv'(t), \qquad [2]$$

supuesto que existe cada una de las derivadas u' y v' en t.

De la definición [2] se sigue que, para cada constante compleja $z_0 = x_0 + iy_0$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[z_0 w(t)] &= \frac{d}{dt}[(x_0 + iy_0)(u + iv)] = \\ &= \frac{d}{dt}[(x_0u - y_0v) + i(y_0u + x_0v)] = \\ &= \frac{d}{dt}(x_0u - y_0v) + i\frac{d}{dt}(y_0u + x_0v) = \\ &= (x_0u' - y_0v') + i(y_0u' + x_0v') = \\ &= (x_0 + iy_0)(u' + iv').\end{aligned}$$

Esto es,

$$\frac{d}{dt}[z_0 w(t)] = z_0 w'(t). \qquad [3]$$

Otras varias reglas aprendidas en el Cálculo, tales como las de derivación de sumas y productos, se aplican igual que para funciones reales de t. Como sucede con la propiedad [3], las verificaciones se basan en las correspondientes reglas para las funciones reales. Una fórmula de derivación esperada, que se deducirá en los ejercicios, es

$$\frac{d}{dt} e^{z_0 t} = z_0 e^{z_0 t}. \qquad [4]$$

Hay que decir, sin embargo, que no toda regla de derivación del Cálculo es válida para funciones del tipo [1]. Supongamos, por ejemplo, que $w(t)$ es continua en el intervalo $a \leqq t \leqq b$; esto es, ambas, u y v son continuas allí. Aunque $w'(t)$ exista cuando $a < t < b$, el teorema del valor medio para la derivada ya no es aplicable. Para ser exactos, no es necesariamente cierto que exista un número c en el intervalo $a < t < b$ tal que

$$w'(c)(b - a) = w(b) - w(a).$$

Para verlo, basta considerar la función $w(t) = e^{it}$ sobre el intervalo $0 \leqq t \leqq 2\pi$. Porque, en tal caso, $w'(t)$ nunca es cero, mientras que $w(2\pi) - w(0) = 0$.

Las integrales definidas de funciones del tipo [1] sobre intervalos $a \leqq t \leqq b$ se definen como

$$\int_a^b w(t)\,dt = \int_a^b u(t)\,dt + i\int_a^b v(t)\,dt \qquad [5]$$

cuando las integrales individuales de la derecha existen. Así pues,

$$\operatorname{Re}\int_a^b w(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Re}[w(t)]\,dt \quad \text{y} \quad \operatorname{Im}\int_a^b w(t)\,dt = \int_a^b \operatorname{Im}[w(t)]\,dt. \qquad [6]$$

Ejemplo 1. Como ilustración,

$$\int_0^1 (1 + it)^2\,dt = \int_0^1 (1 - t^2)\,dt + i\int_0^1 2t\,dt = \tfrac{2}{3} + i.$$

De forma similar se definen las integrales impropias de $w(t)$ sobre intervalos no acotados.

La existencia de las integrales de u y de v en la definición [5] queda garantizada si esas funciones son *continuas a trozos* en el intervalo $a \leqq t \leqq b$. Es decir, si son continuas en todos los puntos de ese intervalo, excepto quizás en un número finito de puntos en los que, si bien discontinua, la función en cuestión posee límites laterales. Naturalmente, sólo se requiere en a el límite por la derecha, y en b sólo por la izquierda. Cuando tanto u como v son continuas a trozos, diremos que la función w tiene esa propiedad.

Las reglas esperadas para integrar el producto de una función $w(t)$ por un número complejo, o sumas de funciones, y para intercambiar límites de integración, son todas válidas. Estas reglas, así como la propiedad

$$\int_a^b w(t)\,dt = \int_a^c w(t)\,dt + \int_c^b w(t)\,dt,$$

son fáciles de verificar sin más que recordar las correspondientes del Cálculo.

El teorema fundamental del Cálculo sobre primitivas puede extenderse a las integrales del tipo [5]. Concretamente, supongamos que las funciones

$$w(t) = u(t) + iv(t) \quad \text{y} \quad W(t) = U(t) + iV(t)$$

son continuas en el intervalo $a \leqq t \leqq b$. Si $W'(t) = w(t)$ para $a \leqq t \leqq b$, entonces $U'(t) = u(t)$ y $V'(t) = v(t)$. Por tanto, en vista de la definición [5],

$$\begin{aligned}\int_a^b w(t)\,dt &= U(t)\Big]_a^b + iV(t)\Big]_a^b = \\ &= [U(b) + iV(b)] - [U(a) + iV(a)].\end{aligned}$$

Esto es,

$$\int_a^b w(t)\,dt = W(t)\Big]_a^b = W(b) - W(a). \qquad [7]$$

Ejemplo 2. Como $d(e^{it})/dt = ie^{it}$,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} e^{it}\,dt &= -ie^{it}\Big]_0^{\pi/4} = -ie^{i\pi/4} + i = \\ &= -i\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) + i = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

Para establecer una propiedad básica de los valores absolutos de las integrales, tomaremos $a < b$ y supondremos que el valor de la integral definida en la Ecuación [5] es un número complejo no nulo. Si r_0 es el módulo y θ_0 un argumento de ese valor, entonces

$$\int_a^b w\,dt = r_0 e^{i\theta_0}.$$

Despejando r_0, se tiene

$$r_0 = \int_a^b e^{-i\theta_0} w\,dt. \qquad [8]$$

Como el lado izquierdo de esa igualdad es un número real, el derecho ha de ser también real. Luego, usando el hecho de que la parte real de un número real es el propio número y recordando la primera de las propiedades [6], vemos que el miembro de la derecha en la Ecuación [8] puede reescribirse así:

$$\int_a^b e^{-i\theta_0} w\,dt = \operatorname{Re}\int_a^b e^{-i\theta_0} w\,dt = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta_0} w)\,dt.$$

Con ello, la Ecuación [8] toma la forma

$$r_0 = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta_0} w)\,dt. \qquad [9]$$

Ahora bien,

$$\operatorname{Re}(e^{-i\theta_0} w) \leqq |e^{-i\theta_0} w| = |e^{-i\theta_0}|\,|w| = |w|;$$

y, en consecuencia, por la Ecuación [9],

$$r_0 \leqq \int_a^b |w|\,dt.$$

Por tanto,

$$\left|\int_a^b w(t)\,dt\right| \leqq \int_a^b |w(t)|\,dt \qquad (a < b) \qquad [10]$$

Esta propiedad es claramente válida incluso cuando el valor de la integral es cero, en particular cuando $a = b$.

Con ligeras modificaciones, la discusión precedente conduce a desigualdades como

$$\left|\int_a^\infty w(t)\,dt\right| \leqq \int_a^\infty |w(t)|\,dt \qquad [11]$$

supuesto que existan ambas integrales impropias.

31. CONTORNOS

Se definen integrales de funciones complejas de una variable *compleja* sobre curvas del plano complejo, en lugar de sobre intervalos de la recta real. En esta sección introduciremos clases de curvas adecuadas para el estudio de tales integrales.

Un conjunto de puntos $z = (x, y)$ en el plano complejo se dice que constituyen un arco si

$$x = x(t), \quad y = y(t) \qquad (a \leqq t \leqq b), \qquad [1]$$

donde $x(t)$ e $y(t)$ son funciones continuas del parámetro t. Esta definición establece una aplicación continua del intervalo $a \leqq t \leqq b$ en el plano xy, o plano z; y los puntos imagen se ordenan por valores crecientes de t. Es conveniente describir los puntos de C por medio de la ecuación

$$z = z(t) \qquad (a \leqq t \leqq b), \qquad [2]$$

donde

$$z(t) = x(t) + iy(t). \qquad [3]$$

El arco C es un arco *simple*, o arco de Jordan, si no se corta a sí mismo; esto es, C es simple si $z(t_1) \neq z(t_2)$ cuando $t_1 \neq t_2$. Cuando el arco C es simple excepto por el hecho de que $z(b) = z(a)$, decimos que C es una *curva cerrada simple*, o curva de Jordan.

La naturaleza geométrica de un arco particular sugiere a menudo notaciones diferentes para el parámetro t en la Ecuación [2]. Tal es el caso en los ejemplos que siguen.

Ejemplo 1. La línea poligonal

$$z = \begin{cases} x + ix & \text{si} \quad 0 \leqq x \leqq 1, \\ x + i & \text{si} \quad 1 \leqq x \leqq 2, \end{cases} \qquad [4]$$

que consta de un segmento recto desde 0 hasta $1 + i$, seguido de otro que va desde $1 + i$ hasta $2 + i$, es un arco simple.

Ejemplo 2. El círculo unidad

$$z = e^{i\theta} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi) \qquad [5]$$

en torno al origen es, por su parte, una curva cerrada simple, orientada en sentido positivo (contrario al de las agujas de un reloj). También lo es el círculo

$$z = z_0 + Re^{i\theta} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi), \qquad [6]$$

centrado en el punto z_0 y de radio R (véase Sec. 6).

Un mismo conjunto de puntos puede constituir arcos diferentes.

Ejemplo 3. El arco

$$z = e^{-i\theta} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi) \qquad [7]$$

no es el mismo que el descrito por la Ecuación [5]. El conjunto de puntos es el mismo, pero ahora el círculo se recorre en *el sentido de las agujas de un reloj*.

Ejemplo 4. Los puntos del arco

$$z = e^{i2\theta} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi) \qquad [8]$$

son los mismos que los de los arcos [5] y [7]. El arco aquí definido difiere, no obstante, de esos dos en que es recorrido *dos veces* en sentido contrario a las agujas del reloj.

Supongamos que las derivadas $x'(t)$ e $y'(t)$ de las componentes de la función [3], usada para describir el arco C, existan y sean continuas sobre todo el intervalo $a \leqq t \leqq b$. Bajo esas condiciones, C se llama un *arco diferenciable*. Se sigue que, al ser la derivada de $z(t)$ (Sec. 30)

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t), \qquad [9]$$

la función real

$$|z'(t)| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

es integrable sobre el intervalo $a \leqq t \leqq b$, siendo la longitud del arco

$$L = \int_a^b |z'(t)|\, dt. \qquad [10]$$

La expresión [10] sale de la definición de longitud de arco en el Cálculo.

Ni que decir tiene que la representación paramétrica usada para C no es única; y que el número L dado por la expresión [10] es invariante bajo ciertos

cambios de dicha representación, como cabía esperar. Más precisamente, supongamos que

$$t = \phi(\tau) \qquad (\alpha \leqq \tau \leqq \beta) \qquad [11]$$

donde ϕ es una función real que aplica el intervalo $\alpha \leqq \tau \leqq \beta$ sobre el intervalo $a \leqq t \leqq b$. Suponemos ϕ continua y con derivada continua. Supondremos además que $\phi'(\tau) > 0$ para cada τ, lo que asegura que t crece con τ. Con el cambio de variable indicado en la Ecuación [11], la expresión [10] para la longitud de C toma la forma

$$L = \int_\alpha^\beta |z'[\phi(\tau)]|\phi'(\tau)\, d\tau.$$

Luego, si C tiene la representación

$$z = Z(\tau) = z[\phi(\tau)] \qquad (\alpha \leqq \tau \leqq \beta), \qquad [12]$$

el hecho de que (Ejercicio 9)

$$Z'(\tau) = z'[\phi(\tau)]\phi'(\tau) \qquad [13]$$

hace posible escribir [10] como

$$L = \int_\alpha^\beta |Z'(\tau)|\, d\tau.$$

Así pues, se obtendría la misma longitud para C si se usara la representación [12].

Si la ecuación $z = z(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ representa un arco diferenciable y $z'(t) \neq 0$ en todo punto del intervalo $a < t < b$, entonces el vector tangente unitario

$$\mathbf{T} = \frac{z'(t)}{|z'(t)|}$$

está bien definido para todo t de ese intervalo abierto, con ángulo de inclinación $\arg z'(t)$. Además, al girar $\mathbf{T}$, lo hace de forma continua mientras el parámetro t varía sobre el intervalo $a < t < b$. Esta expresión de $\mathbf{T}$ es la que se aprende en Cálculo cuando se interpreta $z(t)$ como un radio vector. Tales arcos se llaman *suaves*. Al referirnos a un arco suave $z = z(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$, convenimos que la derivada $z'(t)$ es continua en el intervalo cerrado $a \leqq t \leqq b$ y no nula en el intervalo abierto $a < t < b$.

Un *contorno*, o arco suave a trozos, es un arco que consiste en un número finito de arcos suaves unidos por sus extremos. Por tanto, si la Ecuación [2] representa un contorno, $z(t)$ es continua y su derivada $z'(t)$ es continua a trozos. El arco poligonal [4], por ejemplo, es un contorno. Cuando sólo coinciden los

valores inicial y final de $z(t)$, un contorno C se llama un *contorno cerrado simple*. Sirven de ejemplos los círculos [5] y [6], así como el borde de un triángulo o de un rectángulo, tomados con una cierta orientación. La longitud de un contorno o de un contorno cerrado simple es la suma de las longitudes de los arcos suaves de que consta.

Los puntos de cualquier curva cerrada simple o contorno cerrado simple C son frontera de dos dominios distintos, uno de los cuales es el interior de C y es acotado. El otro, que es el exterior de C, es no acotado. Es conveniente aceptar esta afirmación, conocida como el *teorema de la curva de Jordan*, como geométricamente evidente; su demostración no es sencilla*.

EJERCICIOS

1. Calcular las integrales siguientes:

a) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - i\right)^2 dt$; *b)* $\displaystyle\int_0^{\pi/6} e^{i2t}\, dt$; *c)* $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-zt}\, dt$.

Sol. *a)* $\displaystyle -\frac{1}{2} - i2 \ln 2$; *b)* $\displaystyle \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{i}{4}$; *c)* $\displaystyle \frac{1}{z}$ (Re $z > 0$).

2. Probar que si m y n son enteros,

$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta}\, d\theta = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ 2\pi & \text{si } m = n. \end{cases}$$

3. De acuerdo con la definición [5] de la Sección 30,

$$\int_0^{\pi} e^{(1+i)x}\, dx = \int_0^{\pi} e^x \cos x\, dx + i \int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen} x\, dx.$$

Evaluar las integrales de la derecha calculando las de la izquierda e igualando las partes real e imaginaria de ambos miembros.

Sol. $-(1 + e^{\pi})/2$, $(1 + e^{\pi})/2$.

4. Verificar las siguientes reglas de derivación del modo propuesto.

a) Usando la regla correspondiente del cálculo real, mostrar que

$$\frac{d}{dt}[w(t)]^2 = 2w(t)w'(t)$$

cuando $w(t) = u(t) + iv(t)$ es una función compleja de una variable real t y $w'(t)$ existe.

* Véanse págs. 115-116 del libro de Newman o la Sección 13 del de Thron, citados ambos en el Apéndice 1. El caso especial en que C es un polígono cerrado simple se demuestra en las páginas 281-285 del Vol. 1 de la obra de Hille, citada en ese mismo apéndice.

b) Usar la expresión $e^{z_0 t} = e^{x_0 t} \cos y_0 t + ie^{x_0 t} \operatorname{sen} y_0 t$, donde $z_0 = x_0 + iy_0$ es un número fijo, para demostrar que

$$\frac{d}{dt} e^{z_0 t} = z_0 e^{z_0 t}.$$

5. Aplicar la desigualdad [10], Sección 30, para probar que en todo valor x del intervalo $-1 \leqq x \leqq 1$, las funciones*

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x + i\sqrt{1 - x^2} \cos\theta)^n\, d\theta \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

satisfacen la desigualdad $|P_n(x)| \leqq 1$.

6. Probar que si una función $w(t) = u(t) + iv(t)$ es continua en un intervalo $a \leqq t \leqq b$, entonces

a) $$\int_{-b}^{-a} w(-t)\, dt = \int_a^b w(\tau)\, d\tau;$$

b) $$\int_a^b w(t)\, dt = \int_\alpha^\beta w[\phi(\tau)]\phi'(\tau)\, d\tau,$$

donde la función $\phi(\tau)$ es como se describe en la Sección 31.

Sugerencia: Estas identidades se pueden obtener observando previamente que son válidas para funciones *reales* de t.

7. Sea $w(t) = u(t) + iv(t)$ una función compleja continua definida sobre un intervalo $-a \leqq t \leqq a$.

a) Supongamos que $w(t)$ es *par*; esto es, $w(-t) = w(t)$ en cada punto de ese intervalo. Probar que

$$\int_{-a}^{a} w(t)\, dt = 2 \int_0^a w(t)\, dt.$$

b) Demostrar que si $w(t)$ es una función *impar;* es decir, $w(-t) = -w(t)$ en cada punto t del intervalo, entonces

$$\int_{-a}^{a} w(t)\, dt = 0.$$

Sugerencia: En las dos partes de este ejercicio, usar la propiedad análoga para integrales de funciones *reales* de t, que es gráficamente evidente.

8. Sea $w(t)$ una función compleja continua de t definida en el intervalo $a \leqq t \leqq b$. Considerando el caso especial $w(t) = e^{it}$ sobre el intervalo $0 \leqq t \leqq 2\pi$, probar que *no* siempre es cierto que exista un número c en el intervalo $a < t < b$ tal que $w(c)$

* Estas funciones son realmente polinomios en x. Se conocen como polinomios de Legendre y son importantes en Matemática Aplicada. Véase, por ejemplo, el Capítulo 4 del libro de Lebedev que se cita en el Apéndice 1.

veces $b - a$ sea igual al valor de la integral definida de $w(t)$ desde a hasta b. En otras palabras, probar que el teorema del valor medio para integrales definidas no es aplicable a tales funciones.

9. Comprobar la expresión [13], Sección 31, para la derivada de $Z(\tau) = z[\phi(\tau)]$.

Sugerencia: Escribir $Z(\tau) = x[\phi(\tau)] + iy[\phi(\tau)]$ y aplicar la regla de la cadena para funciones reales de una variable real.

10. Supongamos que una función $f(z)$ es analítica en un punto $z_0 = z_0(t)$ de un arco diferenciable $z = z(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$. Probar que si $w(t) = f[z(t)]$, entonces

$$w'(t) = f'[z(t)]z'(t)$$

cuando $t = t_0$.

Sugerencia: Escribir $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $z(t) = x(t) + iy(t)$, de modo que

$$w(t) = u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)].$$

Aplicar entonces la regla de la cadena para funciones de dos variables para escribir

$$w' = u_x x' + u_y y' + i(v_x x' + v_y y'),$$

y utilizar las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

32. INTEGRALES DE CONTORNO

Vamos ahora con las integrales de funciones complejas f de la variable compleja z. Tales integrales se definen en términos de los valores $f(z)$ a lo largo de un contorno dado C, que va desde un punto $z = z_1$ a un punto $z = z_2$ del plano complejo. Son, por tanto, integrales de línea, y sus valores dependen, en general, del contorno C así como de la función f. Se escribe

$$\int_C f(z)\,dz \quad \text{o} \quad \int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz,$$

siendo utilizada con frecuencia la última notación cuando el valor de la integral es independiente de la elección del contorno que une los dos puntos extremos. Aunque la integral puede ser definida directamente como límite de sumas, preferimos definirla en términos de una integral definida del tipo introducido en la Sección 30.

Supongamos que la ecuación

$$z = z(t) \qquad (a \leqq t \leqq b) \qquad [1]$$

representa un contorno C, que se extiende desde $z_1 = z(a)$ hasta $z_2 = z(b)$. Sea $f(z)$ continua a trozos sobre C, es decir, $f[z(t)]$ es continua a trozos en el intervalo $a \leqq t \leqq b$. Definimos la integral de línea, o *integral de contorno*, de f a lo largo de C como sigue:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t)\,dt. \qquad [2]$$

Nótese que al ser C un contorno $z'(t)$ es también continua a trozos sobre el intervalo $a \leqq t \leqq b$; de modo que la existencia de la integral [2] queda garantizada.

El valor de una integral de contorno es invariante bajo cambio de representación de su contorno, si el cambio es del tipo [12], Sección 31. Esto puede verse por el mismo procedimiento usado en la Sección 31 para poner de manifiesto la invariancia de la longitud de arco.

Asociado con el contorno C usado en la integral [2] está el contorno $-C$, con el mismo conjunto de puntos, pero recorrido en sentido contrario al de C, de manera que el nuevo contorno se extiende desde el punto z_2 al z_1. El contorno $-C$ admite la representación paramétrica $z = z(-t)(-b \leqq t \leqq -a)$. Así que

$$\int_{-c} f(z)\,dz = \int_{-b}^{-a} f[z(-t)][-z'(-t)]\,dt,$$

donde $z'(-t)$ denota la derivada de $z(t)$ con respecto a t, evaluada en $-t$. Tras un cambio de variable en esta última integral [véase Ej. 6a), Sec. 31], encontramos que

$$\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz. \qquad [3]$$

Supongamos que C consta de un contorno C_1 desde z_1 hasta z_3, seguido de un contorno C_2 desde z_3 hasta z_2, siendo el punto inicial de C_2 el punto final de C_1. Entonces exista un número real c, con $z_3 = z(c)$, tal que C_1 viene representado por $z = z(t)$ $(a \leqq t \leqq c)$ y C_2 por $z = z(t)$ $(c \leqq t \leqq b)$. Como

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^c f[z(t)]z'(t)\,dt + \int_c^b f[z(t)]z'(t)\,dt,$$

es evidente que

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz. \qquad [4]$$

A veces, el contorno C se llama la suma de C_1 denotada por $C_1 + C_2$. La suma de dos contornos C_1 y $-C_2$ está bien definida cuando C_1 y C_2 tienen el mismo punto final, y se denota $C_1 - C_2$.

Otras dos propiedades de las integrales de contorno se desprenden inmediata-

mente de la definición [2] y de propiedades de las integrales de funciones complejas $w(t)$ mencionadas en la Sección 30. A saber,

$$\int_C z_0 f(z)\,dz = z_0 \int_C f(z)\,dz, \qquad [5]$$

para toda constante compleja z_0, y

$$\int_c [f(z) + g(z)]\,dz = \int_c f(z)\,dz + \int_c g(z)\,dz. \qquad [6]$$

Finalmente, según la definición [2] precedente y la propiedad [10], Sec. 30,

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leqq \int_a^b |f[z(t)]z'(t)|\,dt.$$

Así, para cualquier constante no negativa M tal que los valores de f sobre C satisfagan $|f(z)| \leqq M$,

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leqq M \int_a^b |z'(t)|\,dt.$$

Dado que la integral de la derecha representa la longitud L del contorno (véase Sec. 31), se deduce que el módulo del valor de la integral de f a lo largo de C no supera a ML:

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leqq ML. \qquad [7]$$

Es desigual estricta, claro está, cuando los valores de f sobre C son tales que $|f(z)| < M$.

Nótese que como todos los caminos de integración considerados aquí son contornos, y los integrandos funciones continuas a trozos definidas sobre esos contornos, siempre existe un número M como el que aparece en la desigualdad [7]. Esto es debido a que la función real $|f[z(t)]|$ es continua en el intervalo cerrado acotado $a \leqq t \leqq b$ cuando f es *continua* sobre C; y una tal función siempre alcanza un valor máximo sobre ese intervalo*. Por tanto, $|f(z)|$ tiene un valor máximo sobre C cuando f es continua sobre él. Se deduce inmediatamente que lo mismo es cierto si f es *continua a trozos* sobre C.

En el Cálculo, las integrales definidas son interpretables como áreas, aparte de otras interpretaciones posibles. Excepto en casos especiales, no se dispone de una interpretación correspondiente, física o geométrica, de las integrales en el plano complejo. Sin embargo, como se ha hecho constar ya, la teoría de integración en el plano complejo es extraordinariamente útil tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas.

* Véase, por ejemplo, A. E. Taylor y W. R. Mann, *Advanced Calculus*, 3.ª ed., pp. 86-90, 1983.

33. EJEMPLOS

El propósito de esta sección es ofrecer ejemplos de la definición en la Sec. 32 de integrales de contorno, e ilustrar diversas propiedades antes mencionadas. Dejamos para la Sec. 34 el desarrollo del concepto de primitivas de los integrandos $f(z)$ en integrales de contorno.

Ejemplo 1. Hallemos el valor de la integral

$$I = \int_C \bar{z}\,dz \qquad [1]$$

cuando C es la mitad derecha

$$z = 2e^{i\theta} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

del círculo $|z| = 2$, desde $z = -2i$ a $z = 2i$ (Fig. 28). Ya que

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad \text{y} \quad \frac{d}{d\theta}\,e^{i\theta} = ie^{i\theta},$$

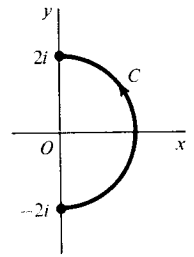


Figura 28

la definición [2], Sec. 32, nos dice que

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2e^{-i\theta} 2ie^{i\theta}\,d\theta = 4i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta = 4\pi i.$$

Nótese que cuando un punto z está sobre el círculo $|z| = 2$, se sigue que $z\bar{z} = 4$, o sea, $\bar{z} = 4/z$. Luego el resultado $I = 4\pi i$ se puede reformular

$$\int_C \frac{dz}{z} = \pi i \qquad [2]$$

Ejemplo 2. En este ejemplo, denotemos en primer lugar por C_1 el contorno OAB que muestra la Figura 29, y calculemos la integral

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{OA} f(z)\,dz + \int_{AB} f(z)\,dz, \qquad [3]$$

donde

$$f(z) = y - x - i3x^2 \qquad (z = x + iy).$$

El tramo OA admite la representación paramétrica $z = 0 + iy$ $(0 \leqq y \leqq 1)$; y como $x = 0$ en sus puntos, los valores de f allí varían con el parámetro y de acuerdo con la ecuación $f(z) = iy$ $(0 \leqq y \leqq 1)$. En consecuencia,

$$\int_{OA} f(z)\,dz = \int_0^1 yi\,dy = i\int_0^1 y\,dy = \frac{i}{2}.$$

Sobre el lado AB, $z = x + i$ $(0 \leqq x \leqq 1)$; luego

$$\int_{AB} f(z)\,dz = \int_0^1 (1 - x - i3x^2)1\,dx =$$

$$= \int_0^1 (1 - x)\,dx - 3i\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{2} - i.$$

A la vista de [3], resulta

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \frac{1 - i}{2}. \qquad [4]$$

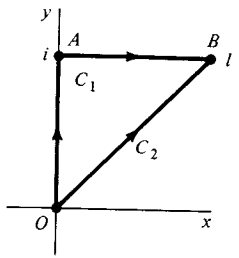


Figura 29

Si C_2 denota el segmento OB de la línea $y = x$, con representación paramétrica $z = x + ix$ $(0 \leqq x \leqq 1)$,

$$\int_{C_2} f(z)\,dz = \int_0^1 -i3x^2(1 + i)\,dx = 3(1 - i)\int_0^1 x^2\,dx = 1 - i. \qquad [5]$$

Evidentemente, pues, las integrales de $f(z)$ a lo largo de los caminos C_1 y C_2 toman valores distintos, pese a que ambos caminos tienen el mismo punto inicial y el mismo punto final.

Obsérvese que, en consecuencia, el valor de la integral $f(z)$ sobre el contorno cerrado simple $OABO$, o sea, $C_1 - C_2$, es

$$\int_{C_1} f(z)\,dz - \int_{C_2} f(z)\,dz = \frac{-1 + i}{2}.$$

Ejemplo 3. Ahora empezamos denotando por C un arco *suave* arbitrario $z = z(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ desde un punto fijo z_1 a un punto fijo z_2. Con el fin de calcular la integral

$$I = \int_C z\,dz = \int_a^b z(t)z'(t)\,dt,$$

hagamos notar que, según el Ejercicio 4a), Sección 31,

$$\frac{d}{dt}\frac{[z(t)]^2}{2} = z(t)z'(t).$$

Así pues,

$$I = \frac{[z(t)]^2}{2}\Big]_a^b = \frac{[z(b)]^2 - [z(a)]^2}{2}.$$

Ahora bien, $z(b) = z_2$ y $z(a) = z_1$; luego $I = (z_2^2 - z_1^2)/2$. Habida cuenta de que el valor de I depende sólo de los puntos extremos de C, y es por lo demás independiente del arco escogido, escribimos

$$\int_{z_1}^{z_2} z\,dz = \frac{z_2^2 - z_1^2}{2}. \qquad [6]$$

(Comparar con el Ejemplo 2, donde el valor de una integral desde un punto a otro dependía del camino elegido.)

La expresión [6] sigue siendo válida cuando C es un contorno no necesariamente suave, ya que un contorno consta de un número finito de arcos suaves C_k $(k = 1, 2, \ldots, n - 1)$, unidos por sus extremos. De forma más precisa, supongamos que cada C_k va desde z_k hasta z_{k+1}. Entonces

$$\int_C z\,dz = \sum_{k=1}^{n-1}\int_{C_k} z\,dz = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{z_{k+1}^2 - z_k^2}{2} = \frac{z_n^2 - z_1^2}{2}, \qquad [7]$$

siendo z_1 el punto inicial de C y z_n su punto final.

De [7] se concluye que la integral de $f(z) = z$ a lo largo de cualquier contorno cerrado en el plano tiene valor cero. (De nuevo, a comparar con el Ejemplo 2,

donde el valor de la integral de una función dada sobre un cierto camino cerrado *no* era cero.) El problema de predecir si una integral sobre un contorno cerrado será cero se discutirá en las próximas secciones. Esta cuestión es crucial en la teoría de funciones de una variable compleja.

Ejemplo 4. Sea C el arco semicircular

$$z = 3e^{i\theta} \qquad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

desde el punto $z = 3$ hasta el $z = -3$ (Fig. 30). Aunque la rama (Sec. 26)

$$f(z) = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2} \qquad (r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi)$$

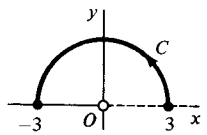


Figura 30

de la función multivaluada $z^{1/2}$ no está definida en el punto inicial $z = 3$ del contorno C, la integral

$$I = \int_C z^{1/2}\, dz$$

de la rama existe, sin embargo, porque el integrando es continuo a trozos sobre C. Para verlo, observemos que cuando

$$z(\theta) = 3e^{i\theta},$$

los límites de la derecha de las componentes real e imaginaria de la función

$$f[z(\theta)] = \sqrt{3}\, e^{i\theta/2} = \sqrt{3}\cos\frac{\theta}{2} + i\sqrt{3}\,\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \qquad (0 < \theta \leqq \pi)$$

en $\theta = 0$ son $\sqrt{3}$ y 0, respectivamente. Por tanto, $f[z(\theta)]$ es continua en el intervalo cerrado $0 \leqq \theta \leqq \pi$ si se define su valor en $\theta = 0$ como $\sqrt{3}$. Como consecuencia,

$$I = \int_0^\pi \sqrt{3}\, e^{i\theta/2} 3ie^{i\theta}\, d\theta = 3\sqrt{3}\, i \int_0^\pi e^{i3\theta/2}\, d\theta;$$

y

$$\int_0^\pi e^{i3\theta/2}\, d\theta = \frac{2}{3i}\, e^{i3\theta/2}\Big]_0^\pi = -\frac{2}{3i}(1 + i).$$

Finalmente, entonces,

$$I = -2\sqrt{3}(1 + i).$$

Ejemplo 5. Sea C el mismo contorno $yz^{1/2}$ la misma rama de la función raíz cuadrada que en el Ejemplo 4. Sin conocer exactamente el valor de la integral, se puede probar fácilmente que

$$\left|\int_C \frac{z^{1/2}}{z^2 + 1}\, dz\right| \leqq \frac{3\sqrt{3}\pi}{8}.$$

Porque cuando z es un punto de C, $|z| = 3$; y se sigue que

$$|z^{1/2}| = |\sqrt{3}\, e^{i\theta/2}| = \sqrt{3}$$

y

$$|z^2 + 1| \geqq ||z|^2 - 1| = 8$$

en los puntos de C en los que el integrando esté definido. Por consiguiente, en esos puntos,

$$\left|\frac{z^{1/2}}{z^2 + 1}\right| \leqq M$$

donde $M = \sqrt{3}/8$. Como la longitud del contorno es $L = 3\pi$, la cota anunciada para el módulo del valor de la integral es ahora consecuencia de la propiedad [7], Sección 32.

EJERCICIOS

Dados los contornos C y las funciones f de los Ejercicios 1 a 6, usar representaciones paramétricas para C, o para los fragmentos de C, con el fin de calcular

$$\int_C f(z)\, dz.$$

1. $f(z) = (z + 2)/z$ y C es

a) el semicírculo $z = 2e^{i\theta}$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$;
b) el semicírculo $z = 2e^{i\theta}$ $(\pi \leqq \theta \leqq 2\pi)$;
c) el círculo $z = 2e^{i\theta}$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$.

Sol. *a*) $-4 + 2\pi i$; *b*) $4 + 2\pi i$; *c*) $4\pi i$.

2. $f(z) = z - 1$ y C es el arco desde $z = 0$ hasta $z = 2$ dado por

a) el semicírculo $z = 1 + e^{i\theta}$ $(\pi \leqq \theta \leqq 2\pi)$;

b) el segmento $0 \leqq x \leqq 2$ del eje real.

Sol. *a*) 0; *b*) 0.

3. $f(z) = \pi \exp(\pi\bar{z})$ y C es el contorno del cuadrado con vértices en los puntos 0, 1, $1 + i$ e i, orientado en sentido positivo.

Sol. $4(e^{\pi} - 1)$.

4. C es el arco desde $z = -1 - i$ hasta $z = 1 + i$ a lo largo de la curva $y = x^3$, y

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y < 0, \\ 4y & \text{si} \quad y > 0. \end{cases}$$

Sol. $2 + 3i$.

5. $f(z) = 1$ y C es un contorno arbitrario desde el punto fijo z_1 hasta el punto fijo z_2 en el plano, ambos arbitrarios.

Sol. $z_2 - z_1$.

6. C es el círculo unidad $|z| = 1$, en sentido contrario al de las agujas de un reloj, y $f(z)$ es la rama

$$z^{-1+i} = \exp[(-1 + i)\log z] \qquad (|z| > 0, \, 0 < \arg z < 2\pi)$$

de la indicada función potencia.

Sol. $i(1 - e^{-2\pi})$.

7. Con ayuda del resultado del Ejercicio 2, Sec. 31, calcular la integral

$$\int_C z^m \bar{z}^n \, dz,$$

donde m y n son enteros, y C es el círculo $|z| = 1$ en sentido positivo (contrario al de las agujas de un reloj).

8. Evaluar la integral del Ejemplo 1, Sección 33, usando para C la representación:

$$z = \sqrt{4 - y^2} + iy \qquad (-2 \leqq y \leqq 2).$$

9. Sea C el arco del círculo $|z| = 2$ que va de $z = 2$ a $z = 2i$ en el primer cuadrante. Sin calcular la integral, probar que

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^2 - 1} \right| \leqq \frac{\pi}{3}.$$

10. Sea C el segmento recto que va de $z = i$ a $z = 1$. Teniendo en cuenta que el punto más próximo al origen, de entre los de ese segmento, es su punto medio, demostrar que

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^4} \right| \leqq 4\sqrt{2}$$

sin calcular la integral.

11. Probar que si C es el contorno del triángulo con vértices en los puntos 0, $3i$ y -4, con orientación positiva, entonces

$$\left| \int_C (e^z - \bar{z}) \, dz \right| \leqq 60.$$

12. Sean C_1 y C_2 los círculos $z = \mathrm{Re}^{i\theta}$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ y $z = z_0 + \mathrm{Re}^{i\theta}$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$, respectivamente. Usar estas representaciones paramétricas para probar que

$$\int_C f(z) \, dz = \int_{C_0} f(z - z_0) \, dz$$

cuando f es continua a trozos sobre C.

13. Sea C_0 el círculo $|z - z_0| = R$, en sentido contrario al de las agujas de un reloj. Usar la representación paramétrica $z = z_0 + \mathrm{Re}^{i\theta}$ $(-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$ para C_0 con objeto de deducir las siguientes fórmulas de integración:

a) $\displaystyle\int_{C_0} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$; *b*) $\displaystyle\int_{C_0} (z - z_0)^{n-1} \, dz = 0 \quad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$;

c) $\displaystyle\int_{C_0} (z - z_0)^{a-1} \, dz = i \frac{2R^a}{a} \operatorname{sen}(a\pi)$, donde a es cualquier número real distinto de cero y donde se toman la rama principal del integrando y el valor principal de R^a.

14. Sea C_R el círculo $|z| = R$ $(R > 1)$, recorrido en sentido positivo. Probar que

$$\left| \int_{C_R} \frac{\mathrm{Log}\, z}{z^2} \, dz \right| < 2\pi \left(\frac{\pi + \ln R}{R} \right)$$

y que por tanto, el valor de esa integral tiende a cero cuando R tiende a infinito.

15. Sea C_ρ el círculo $|z| = \rho (0 < \rho < 1)$, orientado en sentido positivo, y sea $f(z)$ analítica en el disco $|z| \leqq 1$. Probar que si $z^{-1/2}$ representa una rama cualquiera de esa potencia de z, entonces existe una constante no negativa M, *independiente de* ρ, tal que

$$\left| \int_{C_\rho} z^{-1/2} f(z) \, dz \right| \leqq 2\pi M \sqrt{\rho}.$$

Demostrar así que el valor de la integral tiende a cero cuando ρ tiende a cero.

Sugerencia: Puesto que f es analítica, y por tanto continua, en el disco $|z| \leqq 1$, es acotada allí (Sec. 14).

16. Sea C_N el contorno del cuadrado formado por las rectas

$$x = \pm\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{e} \quad y = \pm\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi,$$

donde N es un entero positivo, con orientación en sentido contrario al de las agujas de un reloj (positiva).

a) Mediante las desigualdades

$$|\text{sen } z| \geqq |\text{sen } x| \quad \text{y} \quad |\text{sen } z| \geqq |\text{senh } y|,$$

obtenidas en los Ejercicios 7 y 9 de la Sección 24, mostrar que $|\text{sen } z| \geqq 1$ sobre los lados verticales del cuadrado, y que $|\text{sen } z| > \text{senh}\,(\pi/2)$ sobre los horizontales. Demostrar así que existe una constante positiva A, *independiente de* N, tal que $|\text{sen } z| \geqq A$ para todos los puntos z del contorno C_N.

b) Usando el resultado final de *a*), probar que

$$\left| \int_{C_N} \frac{dz}{z^2 \text{ sen } z} \right| \leqq \frac{16}{(2N + 1)\pi A}$$

y por tanto que el valor de esta integral tiende a cero cuando N tiende a infinito.

17. *a*) Supongamos que $f(z)$ es continua sobre un arco suave C, con represen tación paramétrica $z = z(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$; esto es, $f[z(t)]$ es continua sobre el intervalo $a \leqq t \leqq b$. Demostrar que si $\phi(\tau)$ $(\alpha \leqq \tau \leqq \beta)$ es la función descrita en la Sección 31, entonces

$$\int_a^b f[z(t)]z'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f[Z(\tau)]Z'(\tau)\,d\tau,$$

donde $Z(\tau) = z[\phi(\tau)]$.

b) Argumentar cómo se sigue que la identidad obtenida en la parte *a*) permanece válida cuando C es cualquier contorno, no ya necesaria mente suave, y $f(z)$ continua a trozos sobre C. Concluir de ello que el valor de la integral de $f(z)$ a lo largo de C es el mismo si se usa la representación $z = Z(\tau)$ $(\alpha \leqq \tau \leqq \beta)$, en lugar de la original $z = z(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ para calcularla.

Sugerencia: En *a*), usar el Ejercicio 6*b*), Sección 31, y consultar entonces la expresión [13] de esa sección.

34. PRIMITIVAS

Aunque el valor de una integral de contorno de una función $f(z)$ desde un punto fijo z_1 hasta un punto fijo z_2 depende, por lo general, del camino elegido, hay ciertas funciones cuyas integrales son independientes del camino. (Recordar los Ejemplos 2 y 3 de la Sec. 33). Los ejemplos citados sirven para ilustrar también que los valores de las integrales sobre caminos cerrados son a veces, pero no siempre, cero. El teorema que sigue es útil a la hora de saber si la integración es independiente del camino y cuándo una integral a lo largo de un camino cerrado es cero.

Al demostrar el teorema descubriremos una extensión del teorema fundamental del Cálculo que simplifica la evaluación de muchas integrales de contorno. Esa extensión involucra la noción de *primitiva* de una función continua en un dominio D, o sea, una función F tal que $F'(z) = f(z)$ para todo z en D. Nótese que una primitiva es, necesariamente, una función analítica. Y, asimismo, que una primitiva de una función dada f es única salvo una constante compleja aditiva arbitraria. Esto se debe a que la derivada de la diferencia $F(z) - G(z)$ entre dos primitivas cualesquiera es cero, y según el teorema de la Sección 20, una función analítica es constante en un dominio D si tiene derivada nula en él.

Teorema. *Sea $f(z)$ una función continua en un dominio D. Si cualquiera de estas afirmaciones es verdadera, lo son también las demás:*

a) *f tiene una primitiva F en D;*
b) *las integrales de f a lo largo de contornos contenidos en D que unen dos puntos fijos z_1 y z_2 tienen todas el mismo valor;*
c) *las integrales de f a lo largo de cualquier contorno cerrado contenido en D tienen todas el mismo valor.*

Nótese que el teorema no afirma que alguna de esas propiedades sea válida para una f dada en un cierto dominio D. Lo que afirma es que las tres son simultáneamente válidas o falsas. Para demostrar el teorema es suficiente probar que *a*) implica *b*), que *b*) implica *c*), y que, finalmente, *c*) implica *a*).

Supongamos que *a*) se cumple. Si un contorno C desde z_1 hasta z_2, contenido en D, es un arco *suave*, con representación paramétrica $z = z(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$, sabemos por el Ejercicio 10, Sección 31, que

$$\frac{d}{dt} F[z(t)] = F'[z(t)]z'(t) = f[z(t)]z'(t) \qquad (a \leqq t \leqq b).$$

Por el teorema fundamental del cálculo, extendido para funciones complejas de una variable real (Sec. 30), deducimos que

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t)\,dt = F[z(t)]\Big]_a^b = F[z(b)] - F[z(a)].$$

Como $z(b) = z_2$ y $z(a) = z_1$, el valor de esta integral de contorno es $F(z_2) - F(z_1)$; y ese valor es ciertamente independiente del contorno C, en tanto en cuanto esté contenido en D y una z_1 con z_2. Es decir,

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,dz = F(z)\Big]_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1). \qquad [1]$$

Este resultado es válido también, claro está, cuando C es un contorno arbitrario, no necesariamente suave, contenido en D. El argumento para esto es esencialmente idéntico al del Ejemplo 3, Sección 33. Concretamente, si C consta de un número finito de arcos suaves C_k $(k = 1, 2, \ldots, n - 1)$, cada C_k yendo de z_k a z_{k+1}, entonces

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{C_k} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n-1} [F(z_{k+1}) - F(z_k)] = F(z_n) - F(z_1).$$

Queda así visto que *a*) implica *b*).

Para ver que *b*) implica *c*), sean z_1 y z_2 dos puntos cualesquiera de un contorno cerrado C contenido en D, y tomemos dos caminos, ambos con punto inicial z_1 y punto final z_2, tales que $C = C_1 - C_2$ (Fig. 31). Supuesto que la afirmación *b*) sea satisfecha, podemos escribir

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz, \qquad [2]$$

o sea

$$\int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{-C_2} f(z)\,dz = 0. \qquad [3]$$

Esto es, la integral de $f(z)$ a lo largo del contorno cerrado $C = C_1 - C_2$ tiene valor cero.

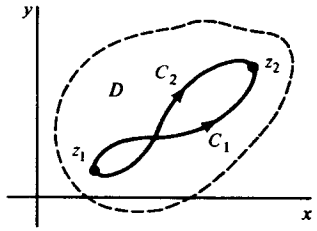


Figura 31

Falta probar que *c*) implica *a*). Para ello, suponiendo que *c*) es cierto, demostraremos la validez de *b*), y después concluiremos *a*). Para ver que *b*) es cierto, sean C_1 y C_2 dos contornos cualesquiera contenidos en D, de un punto z_1 a otro z_2, y observemos que, en vista de *c*), la Ecuación [3] se satisface (véase Fig. 3). Luego la Ecuación [2] se cumple. La integración es, por tanto, independiente del camino en D; y podemos definir la función

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds$$

sobre D. La demostración del teorema quedará completa una vez que mostremos que $F'(z) = f(z)$ en todo punto de D. Hacemos esto tomando un punto $z + \Delta z$, distinto de z, en un entorno de z suficientemente pequeño para que esté contenido en D. Entonces

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s)\,ds - \int_{z_0}^{z} f(s)\,ds = \int_{z}^{z+\Delta z} f(s)\,ds,$$

donde se puede escoger como camino de integración desde z hasta $z + \Delta z$ el segmento recto (Fig. 32). Como

$$\int_{z}^{z+\Delta z} ds = \Delta z$$

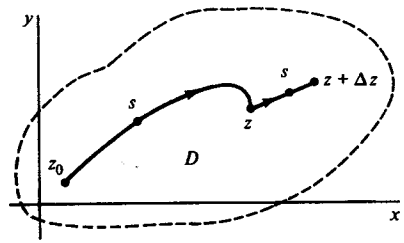


Figura 32

(véase Ej. 5, Sec. 33), podemos escribir

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,ds;$$

y se sigue que

$$\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)]\,ds.$$

Ahora bien, f es continua en el punto z, de modo que para cada ε positivo, existe un número δ positivo tal que

$$|f(s) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad |s - z| < \delta.$$

En consecuencia, si el punto $z + \Delta z$ se toma suficientemente próximo al z como para que $|\Delta z| < \delta$, entonces

$$\left|\frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| < \frac{1}{|\Delta z|}\varepsilon|\Delta z| = \varepsilon;$$

es decir,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z),$$

o sea, $F'(z) = f(z)$.

Los siguientes ejemplos ilustran el teorema y, en particular, el uso de la fórmula [1].

Ejemplo 1. La función continua $f(z) = z^2$ tiene una primitiva $F(z) = z^3/3$ en todo el plano. Luego

$$\int_0^{1+i} z^2\,dz = \frac{z^3}{3}\Big]_0^{1+i} = \frac{1}{3}(1 + i)^3 = \frac{2}{3}(-1 + i)$$

para todo contorno desde $z = 0$ hasta $z = 1 + i$.

Ejemplo 2. La función $1/z^2$, que es continua en todo plano complejo, salvo en el origen, admite primitiva $-1/z$ en el dominio $|z| > 0$. Por tanto,

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{z}\Big]_{z_1}^{z_2} = \frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \qquad (z_1 \neq 0,\ z_2 \neq 0)$$

para cualquier contorno de z_1 a z_2 que no pase por el origen. En particular,

$$\int_C \frac{dz}{z^2} = 0$$

cuando C es el círculo $z = 2e^{i\theta}$ $(-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$ en torno del origen.

Nótese que la integral de la función $f(z) = 1/z$ a lo largo del mismo círculo *no se puede* calcular por el mismo método. Aunque la derivada de cualquier rama $F(z)$ de $\log z$ es $1/z$ (Sec. 26), $F(z)$ no es diferenciable, ni siquiera está definida, a lo largo de su corte de ramificación. En particular, si se usa como corte un rayo $\theta = \alpha$ partiendo del origen, $F'(z)$ no existe en el punto en que ese rayo intersecta al círculo C. Así que C no está contenido en un dominio sobre el cual $F'(z) = 1/z$, y no podemos hacer uso directo de una primitiva.

Ejemplo 3. Sea D el dominio $|z| > 0$, $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$, que consta del plano complejo excluyendo el origen y el eje real negativo. La rama principal $\operatorname{Log} z$ de la función logaritmo sirve como primitiva de la función continua $1/z$ sobre D. Por tanto, podemos escribir

$$\int_{-2i}^{2i} \frac{dz}{z} = \operatorname{Log} z\Big]_{-2i}^{2i} = \operatorname{Log}(2i) - \operatorname{Log}(-2i) = \pi i$$

cuando el camino de integración desde $-2i$ hasta $2i$ es, por ejemplo, el arco

$$z = 2e^{i\theta} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

del círculo del Ejemplo 2. (Comparar con el Ej. 1, Sec. 33, donde esta integral se calculó usando la anterior parametrización para el arco.)

Ejemplo 4. Usaremos una primitiva para calcular la integral

$$\int_{C_1} z^{1/2}\, dz \qquad [4]$$

sobre un contorno C dado, donde

$$z^{1/2} = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2} \qquad (r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi) \qquad [5]$$

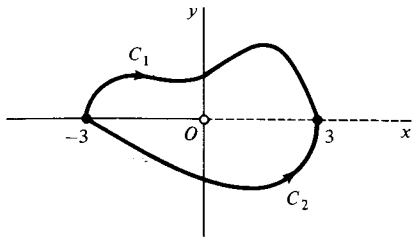


Figura 33

y donde, excepto los puntos extremos $z = \pm 3$, C_1, está por encima del eje real (Fig. 33). Aunque el integrando es continuo a trozos sobre C_1, y por tanto la integral existe, la rama de $z^{1/2}$ no está definida sobre el rayo $\theta = 0$, en particular en el punto $z = 3$. Pero otra rama,

$$f_1(z) = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2} \qquad \left(r > 0,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\right),$$

sí está definida y es continua en todo C_1. Los valores de $f_1(z)$ en todos los puntos de C_1, excepto en $z = 3$, coinciden con los de nuestra integral [5], de modo que el integrando puede sustituirse por $f_1(z)$. Puesto que $f_1(z)$ admite como primitiva la función

$$F_1(z) = \frac{2}{3} z^{3/2} = \frac{2}{3} r\sqrt{r}\, e^{i3\theta/2} \qquad \left(r > 0,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\right),$$

podemos escribir

$$\int_{C_1} z^{1/2}\, dz = \int_{-3}^{3} f_1(z)\, dz = F_1(z)\Big]_{-3}^{3} = 2\sqrt{3}(e^{i0} - e^{i3\pi/2}) = 2\sqrt{3}(1 + i).$$

(Comparar con el Ejemplo 4, Sec. 33.)

La integral [4] a lo largo de cualquier contorno C_2 por debajo del eje real tiene otro valor. Allí podemos reemplazar el integrando por la rama

$$f_2(z) = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2} \qquad \left(r > 0,\ \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2}\right),$$

cuyos valores coinciden con los de la rama [5] en el semiplano inferior. La función analítica

$$F_2(z) = \frac{2}{3} z^{3/2} = \frac{2}{3} r\sqrt{r}\, e^{i3\theta/2} \qquad \left(r > 0,\ \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{2}\right)$$

es una primitiva de $f_2(z)$. Así que

$$\int_{C_2} z^{1/2}\,dz = \int_{-3}^{3} f_2(z)\,dz = F_2(z)\Big]_{-3}^{3} = 2\sqrt{3}(e^{i3\pi} - e^{i3\pi/2}) = 2\sqrt{3}(-1 + i).$$

Se sigue que la integral de la función (5) a lo largo del contorno cerrado $C_2 - C_1$ toma el valor

$$2\sqrt{3}(-1 + i) - 2\sqrt{3}(1 + i) = -4\sqrt{3}.$$

35. EL TEOREMA DE CAUCHY-GOURSAT

En la Sección 34 hemos visto que si una función continua admite primitiva en un dominio D, la integral de $f(z)$ a lo largo de cualquier contorno cerrado C contenido por completo en D tiene valor cero. En esta sección presentamos un teorema que da otras condiciones sobre f que garantizan que el valor de la integral de $f(z)$ a lo largo de un contorno cerrado *simple* (Sec. 31) es cero. Este teorema es crucial en la teoría de funciones de una variable compleja, y veremos algunas extensiones, en ciertas clases especiales de dominios, en la Sec. 38.

Sea C un contorno cerrado simple $z = z(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$, descrito en *sentido positivo* (contrario al de las agujas del reloj), y supongamos que f es analítica en todo punto interior a C y sobre los puntos de C. De acuerdo con la Sección 32,

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f[z(t)]z'(t)\,dt; \qquad [1]$$

y si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $z(t) = x(t) + iy(t)$, el integrando de la derecha en la expresión [1] es el producto de las funciones

$$u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)], \quad x'(t) + iy'(t)$$

de la variable real t. Así pues,

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b (ux' - vy')\,dt + i\int_a^b (vx' + uy')\,dt. \qquad [2]$$

En términos de integrales de línea de funciones reales de dos variables reales, se tiene que

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - v\,dy + i\int_C v\,dx + u\,dy. \qquad [3]$$

Nótese que [3] puede obtenerse formalmente sustituyendo $f(z)$ por $u + iv$ y dz por $dx + i\,dy$ en la izquierda y desarrollando el producto. La expresión [3] es

válida también, claro está, cuando C es cualquier contorno, no necesariamente simple y cerrado, y $f[z(t)]$ es sólo continua a trozos sobre él.

Recordamos a continuación un resultado de Cálculo avanzado que nos permite expresar las integrales de línea en la derecha de la Ecuación [3] como integrales dobles. Concretamente, si dos funciones reales $P(x, y)$ y $Q(x, y)$, junto con sus derivadas parciales de primer orden, son continuas en la región cerrada R que forman los puntos interiores a C y los puntos de C, el teorema de Green asegura que*

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R (Q_x - P_y)\,dx\,dy.$$

Pues bien, como f es continua en R, por ser analítica, las funciones u y v son también continuas en R. Análogamente, si la derivada f' de f es continua sobre R, lo son, asimismo, las primeras derivadas parciales de u y v. El teorema de Green nos capacita para reescribir la Ecuación [3] como

$$\int_C f(z)\,dz = \iint_R (-v_x - u_y)\,dx\,dy + i\iint_R (u_x - v_y)\,dx\,dy. \qquad [4]$$

Pero, a la vista de las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y,\ u_y = -v_x,$$

los integrandos de estas dos integrales dobles son cero en R. Así pues, *cuando f es analítica en R y f' es continua allí,*

$$\int_C f(z)\,dz = 0. \qquad [5]$$

Este resultado fue obtenido por Cauchy en la primera mitad del siglo XIX.

Nótese que una vez establecido que el valor de esa integral es cero, la orientación de C es irrelevante. Esto es, [5] es válida también si C se toma en sentido negativo (el de giro de las agujas del reloj), ya que

$$\int_C f(z)\,dz = -\int_{-C} f(z)\,dz = 0.$$

Goursat** fue el primero en demostrar que la *condición de continuidad sobre f' se puede omitir*. Tal omisión es importante y nos permitirá probar, por ejemplo, que la derivada f' de una función analítica f es analítica, sin tener que suponer la continuidad de f', que se sigue como consecuencia. Ahora enunciamos

* Véase, por ejemplo, A. E. Taylor y W. R. Mann, *Advanced Calculus*, 3.ª ed., p. 457, 1983.
** E. Goursat (1858-1936).

la versión modificada del teorema de Cauchy, conocida como *teorema de Cauchy-Goursat*.

Teorema. *Si una función f es analítica en todos los puntos interiores a un contorno cerrado simple y sobre los puntos de C, entonces*

$$\int_C f(z)\,dz = 0.$$

La demostración se presenta en las dos próximas secciones donde, para fijar ideas, supondremos que C está orientado positivamente. El lector que quiera aceptar este teorema sin demostración puede pasar directamente a la Sección 38.

36. UN LEMA PRELIMINAR

Comenzaremos formando subconjuntos de la región R que constan de los puntos de un contorno cerrado simple C positivamente orientado, junto con los puntos interiores a C. Para ello, trazamos rectas uniformemente espaciadas paralelas a los ejes real e imaginario, tales que la distancia entre rectas verticales sea igual que entre horizontales. Así formamos un número finito de subregiones cuadradas cerradas de modo que cada punto de R esté en al menos una subregión de ésas y cada subregión contiene puntos de R.

Nos referiremos a esas subregiones cuadradas sencillamente como *cuadrados*, teniendo siempre en cuenta que por un cuadrado queremos decir un contorno junto a los puntos interiores a él. Si un cuadrado particular contiene puntos que no están en R, suprimimos esos puntos y llamamos a lo que queda un *cuadrado parcial*. De este modo, *recubrimos* la región R con un número finito de cuadrados y cuadrados parciales (Fig. 34), y nuestra demostración del próximo lema se inicia con este recubrimiento.

Lema. *Sea f analítica en una región cerrada R constituida por los puntos interiores a un contorno cerrado simple positivamente orientado C junto con los puntos del propio C. Para todo número positivo ε, la región R puede ser recubierta con un número finito de cuadrados y cuadrados parciales, indicados por $j = 1, 2, \ldots, n$, tales que en cada uno de ellos hay un punto fijo z_j para el cual la desigualdad*

$$\left| \frac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j) \right| < \varepsilon \qquad (z \neq z_j) \qquad [1]$$

se satisface para todos los demás puntos de ese cuadrado o cuadrado parcial.

Para empezar la demostración, consideremos la posibilidad de que en el recubrimiento construido justo antes del lema exista algún cuadrado o cuadrado parcial en el que no exista un tal punto z_j. Si esa subregión es un cuadrado, construimos cuatro cuadrados más pequeños uniendo los puntos medios de sus lados opuestos (Fig. 34). Si la subregión es un cuadrado parcial, hacemos lo mismo y descartamos las porciones que queden fuera de R. Si en alguna de estas subregiones menores no existe un punto z_j que haga válida la desigualdad [1] para todos los demás puntos de ella distintos del z, construimos cuadrados todavía más pequeños, etc.

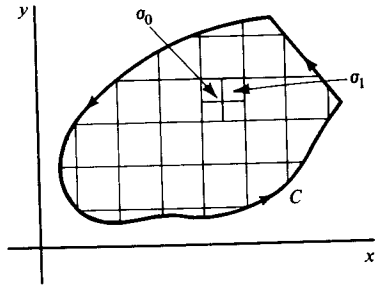


Figura 34

Haciendo esto con cada una de las subregiones originales que lo requiera, encontraremos tras un número finito de pasos que podemos recubrir la región R con una colección de cuadrados y cuadrados parciales en los que el lema es cierto.

Supongamos, por otro lado, que los deseados puntos z_j no existen tras subdividir una de las subregiones dadas un número finito de veces. Sea σ_0 esa subregión, si es un cuadrado, y sea σ_0 el cuadrado completo del que forma parte, en caso de que se trate de un cuadrado parcial. Tras subdividir σ_0, al menos uno de los cuatro cuadrados nuevos, denotémoslo por σ_1, debe contener puntos de R pero no un apropiado z_j. Entonces subdividimos σ_1 y continuamos de esta manera. Puede suceder que tras la subdivisión de un cuadrado σ_{k-1} ($k = 1, 2, \ldots$), sea posible elegir más de uno de los subcuadrados. Para especificar una elección, tomamos como σ_k el que esté más abajo, y si hay varios en pie de igualdad, el que esté más a la izquierda.

Dada la forma en que se ha construido la sucesión infinita

$$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{k-1}, \sigma_k, \ldots \qquad [2]$$

de cuadrados encajados, es fácil probar (Ej. 11, Sec. 38) que hay un punto z_0 común a todos los σ_k; además, cada uno de estos cuadrados contiene puntos de R aparte del z_0. Recuérdese que los tamaños de los cuadrados de la sucesión eran decrecientes y nótese que cualquier δ entorno $|z - z_0| < \delta$ de z_0 contiene tales cuadrados cuando sus diagonales miden menos que δ. Todo δ entorno $|z - z_0| < \delta$ contiene, por tanto, puntos de R distintos de z_0, y eso significa que z_0 es un punto de acumulación de R. Como R es cerrada, se sigue que z_0 es un punto de R. (Véase Sec. 8.)

La función f es analítica en R y en particular en z_0. En consecuencia, existe

$f'(z_0)$. De acuerdo con la definición de derivada (Sec. 15), para cada ε positivo existe un δ entorno $|z - z_0| < \delta$ tal que la desigualdad

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$$

se satisface para todos los puntos de ese entorno distintos de z_0. Pero el entorno $|z - z_0| < \delta$ contiene un cuadrado σ_K cuando el entero K es lo bastante grande como para que la diagonal de ese cuadrado mida menos que δ (Fig. 35). Así pues, z_0 sirve como punto z_j en [1] para la subregión constituida por el cuadrado σ_K o una parte de σ_K. En contra de la manera en que se elaboró la sucesión [2], por tanto, no es necesario subdividir σ_K. Llegamos así a una contradicción, y la demostración del lema queda terminada.

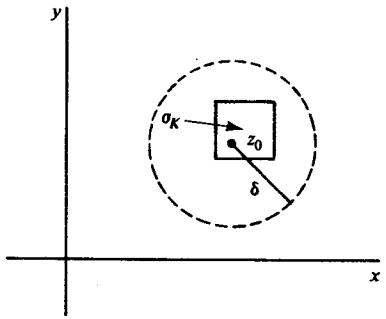


Figura 35

37. DEMOSTRACION DEL TEOREMA DE CAUCHY-GOURSAT

Sigamos con una función f analítica en una región R constituida por un contorno cerrado simple C positivamente orientado y los puntos interiores a él. Ahora estamos en condiciones de demostrar que

$$\int_C f(z)\,dz = 0. \qquad [1]$$

Dado un número ε positivo arbitrario, consideremos el recubrimiento de R del lema de la Sección 36. Definamos sobre el j-ésimo cuadrado o cuadrado parcial la siguiente función, donde z_j es el punto de esa subregión que aparecía en el enunciado del lema:

$$\delta_j(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(z_j)}{z - z_j} - f'(z_j) & \text{si} \quad z \neq z_j, \\ 0 & \text{si} \quad z = z_j. \end{cases} \qquad [2]$$

Por la desigualdad [1] del lema,

$$|\delta_j(z)| < \varepsilon \qquad [3]$$

en todos los puntos z de la subregión sobre la que $\delta_j(z)$ está definida. Asimismo, la función $\delta_j(z)$ es continua en la subregión, ya que $f(z)$ lo es y

$$\lim_{z \to z_j} \delta_j(z) = f'(z_j) - f'(z_j) = 0.$$

A continuación, sean C_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) los contornos orientados positivamente de los cuadrados (o cuadrados parciales) anteriores que recubren R. A la vista de la definición [2], el valor de f en un punto z sobre cualquier C_j particular se puede escribir

$$f(z) = f(z_j) - z_j f'(z_j) z + (z - z_j)\delta_j(z);$$

y eso significa que

$$\int_{C_j} f(z)\,dz = [f(z_j) - z_j f'(z_j)] \int_{C_j} dz + f'(z_j) \int_{C_j} z\,dz + \int_{C_j} (z - z_j)\delta_j(z)\,dz. \qquad [4]$$

Pero

$$\int_{C_j} dz = 0 \quad \text{y} \quad \int_{C_j} z\,dz = 0$$

ya que las funciones 1 y z admiten primitivas en todo el plano complejo. De modo que la Ecuación [4] se reduce a

$$\int_{C_j} f(z)\,dz = \int_{C_j} (z - z_j)\delta_j(z)\,\mathrm{d}z \qquad (j = 1, 2, \ldots, n). \qquad [5]$$

La suma de las n integrales de la izquierda en las ecuaciones [5] se puede escribir

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} f(z)\,dz = \int_C f(z)\,dz$$

ya que las dos integrales a lo largo del contorno común a cualquier par de subregiones adyacentes se cancelan entre sí, porque están orientadas en sentidos opuestos en cada una de ellas (Fig. 36). Sólo sobreviven las integrales a lo largo de los arcos que forman parte de C. Luego, debido a las ecuaciones [5],

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} (z - z_j)\delta_j(z)\,dz;$$

y, por tanto,

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leqq \sum_{j=1}^{n} \left|\int_{C_j} (z - z_j)\delta_j(z)\,dz\right|. \qquad [6]$$

Usemos ahora la propiedad [7], Sección 32, para hallar una cota superior a cada valor absoluto de la derecha en la desigualdad [6]. A tal efecto, recordemos primero que cada C_j coincide entera o parcialmente con el contorno de un cuadrado. En cualquiera de los dos casos, sea s_j la longitud de un lado del cuadrado. Como en la j-ésima integral, tanto la variable z como el punto z_j están en ese cuadrado,

$$|z - z_j| \leqq \sqrt{2}s_j.$$

Entonces, por la desigualdad [3] sabemos que cada integrando de la derecha en [6] cumple la condición

$$|(z - z_j)\delta_j(z)| < \sqrt{2}s_j\varepsilon. \qquad [7]$$

En cuanto a la longitud del camino C_j, es $4s_j$ si C_j es el contorno de un cuadrado. En ese caso, sea A_j el área del cuadrado, y observemos que

$$\left|\int_{C_j} (z - z_j)\delta_j(z)\,dz\right| < \sqrt{2}s_j\varepsilon 4s_j = 4\sqrt{2}A_j\varepsilon. \qquad [8]$$

Si C_j es el contorno de un cuadrado parcial, su longitud no excede de $4s_j + L_j$, donde L_j es la longitud de aquella parte de C_j que es al mismo tiempo parte de C. De nuevo, denotando por A_j el área del cuadrado completo, encontramos que

$$\left|\int_{C_j} (z - z_j)\delta_j(z)\,dz\right| < \sqrt{2}s_j\varepsilon(4s_j + L_j) < 4\sqrt{2}A_j\varepsilon + \sqrt{2}SL_j\varepsilon, \qquad [9]$$

donde S es la longitud de un lado de algún cuadrado que encierra todo el contorno C así como a todos los cuadrados del recubrimiento original R (Fig. 36). Nótese que la suma de todos los A_j no supera a S^2.

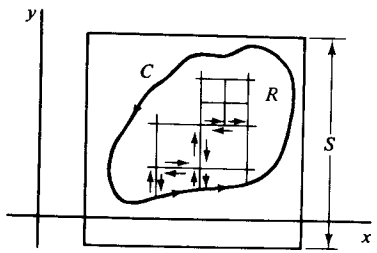


Figura 36

Si L denota la longitud de C, se desprende ahora de las desigualdades [6], [8] y [9] que

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| < (4\sqrt{2}S^2 + \sqrt{2}SL)\varepsilon.$$

Como el valor de ε es arbitrario, podemos escogerlo de manera que el lado derecho de esta última desigualdad sea tan pequeño como queramos. El lado izquierdo, que es independiente de ε, ha de ser, por consiguiente, igual a cero, y la afirmación [1] queda probada. Esto completa la demostración del teorema de Cauchy-Goursat.

38. DOMINIOS SIMPLEMENTE CONEXOS Y MULTIPLEMENTE CONEXOS

Un dominio *simplemente conexo* D es un dominio tal que todo contorno cerrado simple dentro de él encierra sólo puntos de D. El conjunto de puntos interior a un contorno cerrado simple es un ejemplo. El dominio anular entre dos círculos concéntricos no es, por el contrario, simplemente conexo. Un dominio que no es simplemente conexo se llamará *múltiplemente conexo*.

El teorema de Cauchy-Goursat admite la siguiente extensión relativa a dominios simplemente conexos.

Teorema 1. *Si una función f es analítica en un dominio simplemente conexo D, entonces*

$$\int_C f(z)\,dz = 0 \qquad [1]$$

para todo contorno cerrado C contenido en D.

La demostración es sencilla si C es un contorno cerrado *simple* o si es un contorno cerrado que se intersecta a sí mismo un número *finito* de veces. En efecto, si C es simple y está contenido en D, la función f es analítica en todo punto interior a C y en todo punto de C; y el teorema de Cauchy-Goursat asegura la validez de [1]. Además, si C es cerrado pero intersecta consigo mismo un número finito de veces, consta de un número finito de contornos cerrados simples, como ilustra la Figura 37. Aplicando el teorema de Cauchy-Goursat a cada uno de esos contornos cerrados simples, obtenemos el resultado deseado para C. Las sutilezas aparecen cuando el contorno tiene infinitas autointersecciones. El Ejercicio 13 ilustra un método que resulta eficaz con frecuencia para probar que el teorema es todavía aplicable*.

* Una demostración del teorema sobre caminos más generales de longitud finita puede verse, por ejemplo, en las Secciones 63-65 del Volumen I del libro de Markushevich, citado en el Apéndice 1.

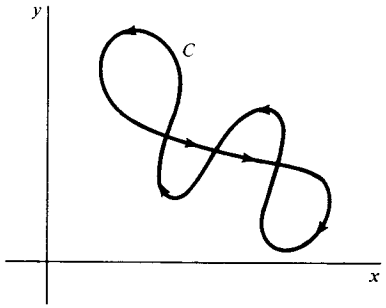


Figura 37

Corolario 1. *Una función f que es analítica sobre un dominio simplemente conexo D tiene primitiva en D.*

Este corolario es consecuencia inmediata del Teorema 1, a causa del teorema de la Sección 34, que asegura que una función f siempre admite primitiva en un dominio dado cuando la Ecuación [1] se satisface para todo contorno cerrado C en ese dominio. Nótese que, al ser el plano complejo simplemente conexo, el Corolario 1 nos dice que *las funciones enteras siempre admiten primitiva.*

El teorema de Cauchy-Goursat se puede, asimismo, extender de modo que admita integrales a lo largo del contorno de un dominio múltiplemente conexo.

Teorema 2. *Supongamos que*

a) *C es un contorno cerrado simple, con orientación positiva;*
b) *C_k ($k = 1, 2, ..., n$) denota un número finito de contornos cerrados simples, orientados positivamente, interiores a C y cuyos interiores no tienen puntos en común (Fig. 38).*

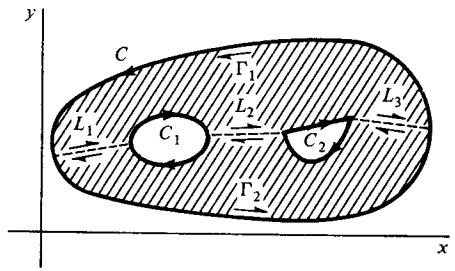


Figura 38

Si una función f es analítica en la región cerrada formada por los puntos interiores a C o del propio C, excepto los puntos interiores a cada C_k, entonces

$$\int_C f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)\,dz = 0. \qquad [2]$$

Para probarlo, introducimos un camino poligonal L_j, formado por un número finito de segmentos rectos unidos entre sí, que conecte el contorno exterior C con el contorno interior C_1. Introducimos otro contorno poligonal L_2 que una C_1 con C_2; y continuamos así, con L_{n+1} conectando C_n con C. Como se ha indicado mediante las flechas de media punta en la Figura 38, se pueden formar dos contornos cerrados simples Γ_1 y Γ_2, consistente cada uno en caminos poligonales L_k o L_{-k} y fragmentos de C y de C_k, y orientados de manera que los puntos encerrados por ellos queden a la izquierda. Ahora podemos aplicar a f el teorema de Cauchy-Goursat sobre Γ_1 y Γ_2, y la suma de las integrales sobre esos contornos resulta ser cero. Como las integrales en direcciones opuestas a lo largo de cada L_k se cancelan, sólo quedan las integrales a lo largo de C y de C_k; y se concluye [2].

La Ecuación [2] se reformula a veces de la manera más compacta que abajo se indica. Sea R la región cerrada formada por los puntos interiores a C o del propio C, excepto los puntos interiores a cada C_k; y sea B el contorno completo orientado de R, que consta de C y de todos los C_k, recorridos en un sentido tal que los puntos interiores de R queden a la izquierda de B. La Ecuación [2] se reescribe

$$\int_B f(z)\,dz = 0. \qquad [3]$$

Ejemplo. Hagamos notar que

$$\int_B \frac{dz}{z^2(z^2 + 9)} = 0$$

cuando B consta del círculo $|z| = 2$, con orientación positiva, junto con el círculo $|z| = 1$, descrito en sentido negativo (Fig. 39). El integrando es analítico, excepto en los puntos $z = 0$ y $z = \pm 3i$, todos los cuales caen fuera de la región angular con contorno B.

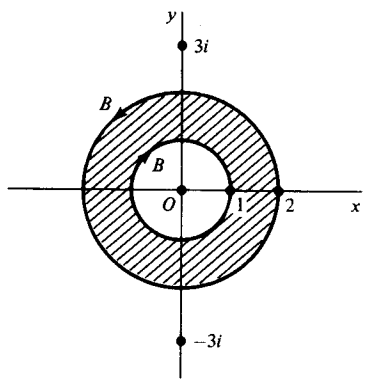


Figura 39

El siguiente corolario es una consecuencia particularmente importante del Teorema 2.

Corolario 2. *Sean C_1 y C_2 contornos cerrados simples positivamente orientados, donde C_2 es interior a C_1 (Fig. 40). Si una función f es analítica en la región cerrada que forman esos contornos y los puntos situados entre ellos, entonces*

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_2} f(z)\,dz. \qquad [4]$$

Para verificarlo, usamos el Teorema 2 para escribir

$$\int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{-C_2} f(z)\,dz = 0;$$

y observamos que esto no es sino una formulación alternativa de la Ecuación [4].

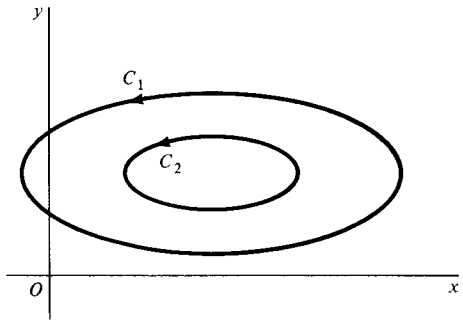


Figura 40

El Corolario 2 se conoce como el *principio de deformación de caminos*, ya que nos dice que si C_1 se deforma continuamente en C_2 pasando siempre por puntos en los que f es analítica, el valor de la integral de f sobre C_1 no cambia.

EJERCICIOS

1. Probar, con ayuda de una primitiva, que para todo contorno C que vaya de un punto z_1 a un punto z_2,

$$\int_C z^n\,dz = \frac{1}{n+1}(z_2^{n+1} - z_1^{n+1}) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

2. Calcular estas integrales, donde el camino es un contorno arbitrario entre los límites de integración:

$$a)\ \int_i^{i/2} e^{\pi z}\,dz; \qquad b)\ \int_0^{\pi+2i} \cos\left(\frac{z}{2}\right)dz; \qquad c)\ \int_1^3 (z-2)^3\,dz.$$

Sol. $a)\ (1+i)/\pi;$ $b)\ e + (1/e);$ $c)\ 0.$

3. Hallando una primitiva, probar que

$$\int_{C_0} (z - z_0)^{n-1}\,dz = 0 \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

cuando C_0 es cualquier contorno cerrado que no pase por el punto z_0. [Comparar con el Ej. 13*b*), Sec. 33.]

4. Aplicar el teorema de Cauchy-Goursat para mostrar que

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

cuando el contorno C es el círculo $|z| = 1$, con cualquier orientación, y cuando

$$a)\ f(z) = \frac{z^2}{z-3}; \qquad b)\ f(z) = ze^{-z}; \qquad c)\ f(z) = \frac{1}{z^2+2z+2};$$

$$d)\ f(z) = \operatorname{sech} z; \qquad e)\ f(t) = \operatorname{tg} z; \qquad f)\ f(z) = \operatorname{Log}(z+2).$$

5. Sea B el contorno del dominio entre el círculo $|z| = 4$ y el cuadrado cuyos lados están en las rectas $x = \pm 1$, $y = \pm 1$. Supuesto B orientado de modo que los puntos del dominio queden a la izquierda de B, argumentar por qué

$$\int_B f(z)\,dz = 0$$

para

$$a)\ f(z) = \frac{1}{3z^2+1}; \qquad b)\ f(z) = \frac{z+2}{\operatorname{sen}(z/2)}; \qquad c)\ f(z) = \frac{z}{1-e^z}.$$

6. Según el Ejercicio 13, Sección 33, la integral de $1/(z - z_0)$ a lo largo de un círculo $|z - z_0| = R$ positivamente orientado siempre tiene valor $2\pi i$, y la integral de $(z - z_0)^{n-1}$ $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ a lo largo del mismo círculo tiene valor cero. Usar esos resultados y el Corolario 2 de la Sección 38 para demostrar que

$$\int_C \frac{dz}{z-2-i} = 2\pi i, \qquad \int_C (z-2-i)^{n-1}\,dz = 0 \qquad (n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

cuando C es el contorno del rectángulo $0 \leqq x \leqq 3$, $0 \leqq y \leqq 2$, recorrido en sentido positivo.

7. *a*) Usando la rama

$$\log z = \ln r + i\theta \qquad (r > 0,\ 0 < \theta < 2\pi)$$

de la función logaritmo como primitiva para $1/z$, probar que

$$\int_{-2i}^{2i} \frac{dz}{z} = -\pi i$$

cuando el camino de integración desde $-2i$ hasta $2i$ es la mitad izquierda del círculo $|z| = 2$.

b) Explicar cómo se desprende de los resultados de la parte *a*) y del Ejemplo 3, Sección 34, que

$$\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

cuando C es el círculo completo $|z| = 2$ orientado positivamente. [Comparar con el Ej. 13*a*), Secc. 33.]

8. Probar que

$$\int_{-1}^{1} z^i\, dz = \frac{1 + e^{-\pi}}{2}(1 - i),$$

donde z^i denota la rama principal

$$z^i = \exp(i \operatorname{Log} z) \qquad (|z| > 0, -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi)$$

y donde el camino de integración es cualquier contorno desde $z = -1$ hasta $z = 1$ que, salvo sus puntos terminales, está por encima del eje real.

Sugerencia: Usar una primitiva de la rama

$$z^i = \exp(i \log z) \qquad \left(|z| > 0, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}\right)$$

de la misma función potencia.

9. Sea C el contorno completo orientado positivamente del semidisco $0 \leqq r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$, y sea f una función continua definida en ese semidisco poniendo $f(0) = 0$ y usando la rama

$$f(z) = \sqrt{r}e^{i\theta/2} \qquad \left(r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\right)$$

de la función multivaluada $z^{1/2}$. Demostrar que

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

calculando por separado las integrales de $f(z)$ sobre el semicírculo y sobre los dos radios que constituyen C. ¿Por qué no se aplica aquí el teorema de Cauchy-Goursat?

10. *Intervalos encajados.* Se forma una sucesión infinita de intervalos cerrados $a_n \leqq x \leqq b_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) del siguiente modo. El intervalo $a_1 \leqq x \leqq b_1$ es la mitad izquierda

o derecha del primer intervalo $a_0 \leqq x < b_0$, y el intervalo $a_2 \leqq x \leqq b_2$ es entonces una de las dos mitades de $a_1 \leqq x \leqq b_1$, etc. Probar que existe un punto x_0 que pertenece a todos y cada uno de los intervalos cerrados $a_n \leqq x \leqq b_n$.

Sugerencia: Los puntos extremos de la izquierda a_n constituyen una sucesión acotada no decreciente de números, porque $a_0 \leqq a_n \leqq a_{n+1} < b_0$, luego tiene límite A al tender n a infinito. Probar que también los puntos finales b_n tienen un límite B. Y a continuación demostrar que $A = B$, y hacer $x_0 = A = B$.

11. *Cuadrados encajados.* Un cuadrado σ_0: $a_0 \leqq x \leqq b_0$, $c_0 \leqq y \leqq d_0$ se divide en cuatro cuadrados iguales mediante segmentos rectos paralelos a los ejes coordenados. Se escoge uno de estos cuatro cuadrados más pequeños σ_1: $a_1 \leqq x \leqq b_1$, $c_1 \leqq y \leqq d_1$ de acuerdo con algún criterio. Este, a su vez, se divide de nuevo en cuatro, uno de los cuales, llamémosle σ_2, se selecciona, etc. (véase Sección 36). Demostrar que existe un punto (x_0, y_0) que pertenece a cada una de las regiones cerradas de la sucesión infinita $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$

Sugerencia: Aplicar el Ejercicio 10 a cada una de las sucesiones de intervalos cerrados $a_n \leqq x \leqq b_n$ y $c_n \leqq y \leqq d_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

12. Probar que si C es un contorno cerrado simple positivamente orientado, el área de la región limitada por C se puede expresar

$$\frac{1}{2i}\int_C \bar{z}\, dz.$$

Sugerencia: Nótese que se puede usar aquí [4] de la Sección 35, a pesar de que la función $f(z) = \bar{z}$ no es analítica.

13. *a*) Aceptemos el hecho de que el camino C_1 desde el origen hasta el punto $z = 1$ a lo largo de la gráfica (Fig. 41) de la función

$$y(x) = x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) \qquad (0 < x \leqq 1),$$

donde $y(0) = y'(0) = 0$, es un arco suave. Sea C el contorno cerrado formado por C_1 seguido del segmento recto C_2 de regreso al origen por el eje real. Comprobar que C se intersecta a sí mismo en los puntos $z = 1/n$ ($n = 2, 3, \ldots$).

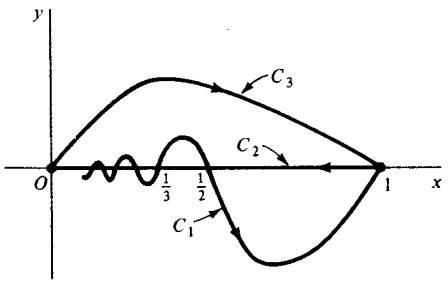


Figura 41

b) Sea f una función entera, y sea C_3 un arco suave desde el origen hasta el punto $z = 1$, sin autointersecciones y que sólo tiene en común con los arcos C_1 y C_2

de la parte *a*) los puntos terminales. Aplicar el teorema de Cauchy-Goursat (Sec. 35) para probar que

$$\int_{C_1} f(z)\,dz = \int_{C_3} f(z)\,dz \quad \text{y} \quad \int_{C_2} f(z)\,dz = -\int_{C_3} f(z)\,dz.$$

c) Concluir de *b*) que

$$\int_C f(z)\,dz = 0,$$

incluso cuando el contorno cerrado C, descrito en la parte *a*), tiene infinitas autointersecciones.

39. LA FORMULA INTEGRAL DE CAUCHY

Vamos a enunciar otro resultado fundamental.

Teorema. *Sea f analítica en el interior y en los puntos de un contorno cerrado simple C, orientado positivamente. Si z_0 es un punto interior a C, entonces*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}. \qquad [1]$$

La fórmula [1] se llama la *fórmula integral de Cauchy*. Afirma que si una función f ha de ser analítica en el interior de y sobre los puntos de un contorno cerrado simple C, los valores de f interiores a C están completamente determinados por los valores de f sobre C.

Cuando se expresa la fórmula integral de Cauchy como

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0), \qquad [2]$$

cabe utilizarla para calcular ciertas integrales a lo largo de contornos cerrados simples.

Ejemplo. Sea C el círculo positivamente orientado $|z| = 2$. Como la función $f(z) = z/(9 - z^2)$ es analítica en el interior y sobre C, y ya que el punto $z_0 = -i$ es interior a C, la fórmula [2] nos dice que

$$\int_C \frac{z\,dz}{(9 - z^2)(z + i)} = \int_C \frac{z/(9 - z^2)}{z - (-i)}\,dz = 2\pi i\left(\frac{-i}{10}\right) = \frac{\pi}{5}.$$

Nuestra demostración del teorema comienza por el hecho (Sec. 14) de que al ser f continua en z_0, a cada ε, por pequeño que sea, le corresponde un δ tal que

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad |z - z_0| < \delta.$$

Escojamos ahora un número positivo ρ menor que δ y tan pequeño que el círculo positivamente orientado $|z - z_0| = \rho$, denotado C_0 en la Figura 42, sea interior a C. Entonces

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad |z - z_0| = \rho. \qquad [3]$$

Esta afirmación juega un papel importante en lo que sigue.

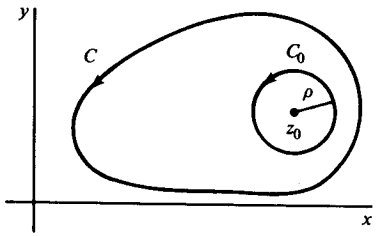


Figura 42

Puesto que la función $f(z)/(z - z_0)$ es analítica en la región cerrada formada por C, C_0, y los puntos entre ellos, sabemos por el Corolario 2 de la Sección 38, que

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} = \int_{C_0} \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}.$$

Lo que nos permite escribir

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} - f(z_0)\int_{C_0} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz. \qquad [4]$$

Ahora bien [véase Ej. 13*a*), Sec. 33],

$$\int_{C_0} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i;$$

y, por tanto, la Ecuación [4] se convierte en

$$\int_C \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} - 2\pi i f(z_0) = \int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz. \qquad [5]$$

Refiriendo ahora a [3] y observando que la longitud de C_0 es $2\pi\rho$, podemos aplicar la propiedad [7], Sección 32, de las integrales:

$$\left|\int_{C_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\,dz\right| < \frac{\varepsilon}{\rho}\,2\pi\rho = 2\pi\varepsilon.$$

En vista de la Ecuación [5], pues,

$$\left| \int_C \frac{f(z)\,dz}{z - z_0} - 2\pi i f(z_0) \right| < 2\pi\varepsilon.$$

Como el lado izquierdo de esta desigualdad es una constante no negativa menor que un número positivo arbitrariamente pequeño, debe ser cero. En consecuencia, la Ecuación [2] es válida y el teorema queda demostrado.

40. DERIVADAS DE LAS FUNCIONES ANALITICAS

Ya estamos preparados para probar que si una función es analítica en un punto, admite derivadas de todos los órdenes en ese punto, y todas ellas son analíticas en él.

Comenzamos suponiendo que f es analítica en el interior y sobre los puntos de un contorno cerrado simple C. Sea z un punto interior a C. Denotando por s los puntos de C y usando la fórmula integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)\,ds}{s - z}, \qquad [1]$$

probaremos que la derivada de f en z existe y admite la representación integral

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)\,ds}{(s - z)^2}. \qquad [2]$$

La expresión [2] se puede obtener formalmente derivando el integrando en [1] con respecto a z.

Para verificar [2], observemos que, de acuerdo con la fórmula [1],

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left(\frac{1}{s - z - \Delta z} - \frac{1}{s - z} \right) \frac{f(s)}{\Delta z}\,ds = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)\,ds}{(s - z - \Delta z)(s - z)}$$

cuando $0 < |\Delta z| < d$, donde d es la distancia más corta desde z hasta los puntos s de C. Ahora usamos el hecho de que f es continua sobre C para ver que el valor de la última integral tiende al valor de la integral

$$\int_C \frac{f(s)\,ds}{(s - z)^2}$$

cuando Δz tiende a cero. Para ello, escribamos primero la diferencia

$$\int_C \left[\frac{1}{(s - z - \Delta z)(s - z)} - \frac{1}{(s - z)^2} \right] f(s)\,ds$$

de estas dos integrales en la forma

$$\Delta z \int_C \frac{f(s)\,ds}{(s - z - \Delta z)(s - z)^2}.$$

A continuación, denotemos por M el valor máximo de $|f(s)|$ sobre C, y sea L la longitud de C. Tras observar que $|s - z| \geqq d$ y

$$|s - z - \Delta z| \geqq ||s - z| - |\Delta z|| \geqq d - |\Delta z|,$$

llegamos fácilmente a la desigualdad

$$\left| \Delta z \int_C \frac{f(s)\,ds}{(s - z - \Delta z)(s - z)^2} \right| \leqq \frac{|\Delta z| ML}{(d - |\Delta z|)d^2},$$

donde la última fracción tiende a cero cuando Δz tiende a cero. En consecuencia,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)\,ds}{(s - z)^2};$$

y [2] queda así probada.

Si aplicamos la misma técnica a la expresión [2], encontramos que

$$f''(z) = \frac{1}{\pi i} \int_C \frac{f(s)\,ds}{(s - z)^3}. \qquad [3]$$

Más precisamente, si $0 < |\Delta z| < d$,

$$\frac{f'(z + \Delta z) - f'(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \left[\frac{1}{(s - z - \Delta z)^2} - \frac{1}{(s - z)^2} \right] \frac{f(s)\,ds}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{2(s - z) - \Delta z}{(s - z - \Delta z)^2 (s - z)^2} f(s)\,ds;$$

y, de nuevo a causa de la continuidad de f sobre C, se puede ver que el valor de la integral

$$\int_C \left[\frac{2(s - z) - \Delta z}{(s - z - \Delta z)^2 (s - z)^2} - \frac{2}{(s - z)^3} \right] f(s)\,ds = \int_C \frac{3(s - z)\,\Delta z - 2(\Delta z)^2}{(s - z - \Delta z)^2 (s - z)^3} f(s)\,ds$$

tiende a cero cuando Δz tiende a cero. (Véase Ej. 7, Sec. 41.)

La expresión [3] establece la existencia de la segunda derivada de la función f en todo punto z interior a C. De hecho, enseña que si una función f es analítica en un punto, su derivada f' es también analítica en ese punto. Porque si f es analítica en el punto z, debe existir un círculo en torno de z tal que f es analítica dentro de y sobre el círculo. Así que, a la vista de [3], $f''(z)$ existe en todo punto interior al círculo, y la derivada f' es, por tanto, analítica en z. Cabe aplicar el mismo argumento a la función analítica f' para concluir que f'' es analítica, etc. Hemos llegado así al siguiente resultado fundamental.

Teorema. *Si una función f es analítica en un punto, sus derivadas de todos los órdenes son también funciones analíticas en ese punto.*

En particular, cuando una función

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

es analítica en un punto $z = (x, y)$, la analiticidad de f' garantiza la continuidad de f' allí. Entonces, como

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = v_y(x, y) - iu_y(x, y),$$

podemos concluir que las derivadas parciales de primer orden de u y de v son continuas en ese punto. Más aún, ya que f'' es analítica y continua en z, y ya que

$$f''(z) = u_{xx}(x, y) + iv_{xx}(x, y) = v_{yx}(x, y) - iu_{yx}(x, y),$$

etc., llegamos a un corolario que fue anticipado en la Sección 21, al introducir las funciones armónicas.

Corolario. *Si una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en un punto $z = x + iy$, sus funciones componentes u y v tienen derivadas parciales continuas de todo orden en ese punto.*

Si convenimos en denotar $f(z)$ por $f^{(0)}(z)$, y en que $0! = 1$, por inducción matemática se puede verificar esta notable fórmula:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(s)\, ds}{(s - z)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad [4]$$

Cuando $n = 0$, no es sino la fórmula integral de Cauchy [1]; si suponemos que la fórmula [4] es válida para cualquier entero particular no negativo $n = m$, procediendo como hicimos al obtener [2] y [3] podemos demostrar su validez para $n = m + 1$. Dejamos los detalles de tal demostración como ejercicio.

La fórmula [4], y la fórmula integral de Cauchy en particular, admiten extensión al caso en el que el contorno cerrado simple C es reemplazado por *el contorno orientado de un dominio múltiplemente conexo*, descrito en el Teorema 2 de la Sección 38. Esto puede hacerse cuando z es un punto del dominio y f es analítica en la región constituida por el dominio y su frontera. El método se ilustra en el Capítulo 5 (Sec. 47), donde es necesaria una tal extensión de la fórmula integral de Cauchy de contorno.

Escrita en la forma

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad [5]$$

donde z_0 es un punto prefijado interior a C, la expresión [4] es una extensión de la fórmula integral de Cauchy en la notación de la Sección 39, donde la fórmula fue deducida. Así nos encontramos con una fórmula útil, a saber,

$$\int_C \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad [6]$$

para el cálculo de ciertas integrales. Ya ha quedado ilustrado, para $n = 0$, en la Sección 39.

Ejemplo. Sea z_0 cualquier punto interior a un contorno cerrado simple C orientado positivamente. Cuando $f(z) = 1$, la fórmula [6] enseña que

$$\int_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i, \quad \int_C \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

(Comparar con el Ej. 13, Sec. 33.)

41. EL TEOREMA DE MORERA

Sea D un dominio, quizás no simplemente conexo, y sea f una función continua en D. Supongamos, además, que las integrales de f a lo largo de contornos cerrados contenidos en D son siempre nulas. De acuerdo con el teorema de la Sección 34, f admite una primitiva en D, es decir, existe una función analítica F tal que $F'(z) = f(z)$ en todo punto de D.

Ahora bien, sabemos por la Sección 40 que la derivada de una función analítica es también analítica; y puesto que f es la derivada de F, se sigue que f es analítica en D. Ese es el contenido de un teorema debido a E. Morera (1856-1909).

Teorema. *Si una función f es continua en un dominio D y si*

$$\int_C f(z)\, dz = 0 \qquad [1]$$

para todo contorno cerrado C contenido en D, entonces f es analítica en D.

En particular, cuando D es *simplemente conexo*, tenemos para la clase de las funciones continuas en D un recíproco del Teorema 1 de la Sección 38, que es la extensión del teorema de Cauchy-Goursat a tales dominios.

EJERCICIOS

1. Sea C el contorno del cuadrado cuyos lados están sobre las rectas $x = \pm 2$ e $y = \pm 2$, con C recorrido positivamente. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_C \frac{e^{-z}\,dz}{z - (\pi i/2)}$; *b)* $\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{z(z^2 + 8)}\,dz$; *c)* $\displaystyle\int_C \frac{z\,dz}{2z + 1}$;

d) $\displaystyle\int_C \frac{\operatorname{tg}(z/2)}{(z - x_0)^2}\,dz\ (-2 < x_0 < 2)$; *e)* $\displaystyle\int_C \frac{\cosh z}{z^4}\,dz$.

Sol. *a)* 2π; *b)* $\pi i/4$; *c)* $-\pi i/2$; *d)* $i\pi \sec^2(x_0/2)$; *e)* 0.

2. Hallar el valor de la integral de $g(z)$ a lo largo del círculo $|z - i| = 2$ en sentido positivo cuando

a) $g(z) = \dfrac{1}{z^2 + 4}$; *b)* $g(z) = \dfrac{1}{(z^2 + 4)^2}$.

Sol. *a)* $\pi/2$; *b)* $\pi/16$.

3. Sea C el círculo $|z| = 3$, descrito en sentido positivo. Probar que si

$$g(w) = \int_C \frac{2z^2 - z - 2}{z - w}\,dz \qquad (|w| \neq 3),$$

entonces $g(2) = 8\pi i$. ¿Cuál es el valor de $g(w)$ cuando $|w| > 3$?

4. Sea C un contorno cerrado simple en el plano z descrito en sentido positivo, y sea

$$g(w) = \int_C \frac{z^3 + 2z}{(z - w)^3}\,dz.$$

Probar que $g(w) = 6\pi i w$ cuando w está dentro de C, y que $g(w) = 0$ si w está fuera de C.

5. Demostrar que si f es analítica en el interior de y sobre un contorno cerrado simple C y z_0 no está sobre C, entonces

$$\int_C \frac{f'(z)\,dz}{z - z_0} = \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^2}.$$

6. Sea f una función *continua* sobre un contorno cerrado simple C. Siguiendo el procedimiento usado en la Sección 40, probar que la función

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)\,ds}{s - z}$$

es *analítica* en todo punto z interior a C, y que

$$g'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(s)\,ds}{(s - z)^2}$$

en tales puntos.

7. Dar los detalles de la deducción de la representación integral [3], Sección 40, para $f''(z)$.

Sugerencia: En las simplificaciones algebraicas, conservar la diferencia $s - z$ como un solo término. Además, denotar por D la *máxima* distancia de z a puntos s de C.

8. Desarrollar el argumento de inducción usado al establecer la representación integral [4], Sección 40, para $f^{(n)}(z)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Sugerencia: Usar la fórmula binomial (Ej. 16, Sec. 2) y la sugerencia del Ejercicio 7.

9. Sea C el círculo unidad $z = e^{i\theta}$ $(-\pi \leqq \theta \leqq \pi)$. Probar en primer lugar que, para cualquier constante a real,

$$\int_C \frac{e^{az}}{z}\,dz = 2\pi i.$$

A continuación, escribir la integral en términos de θ para deducir la fórmula de integración

$$\int_0^{\pi} e^{a\cos\theta}\cos(a \operatorname{sen}\theta)\,d\theta = \pi.$$

10. *a)* Con ayuda de la fórmula binomial (Ej. 16, Sec. 2), probar que para cada valor de n, la función

$$P_n(z) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{dz^n}(z^2 - 1)^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

es un polinomio de grado n*.

b) Sea C cualquier contorno cerrado simple positivamente orientado que rodea a un punto prefijado z. Con ayuda de la representación integral [4], Sección 40, para la n-ésima derivada de una función analítica, demostrar que los polinomios de la parte *a)* se pueden expresar en la forma

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i}\int_C \frac{(s^2 - 1)^n}{(s - z)^{n+1}}\,ds \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

---

* Estos son los polinomios de Legendre que aparecen en el Ejercicio 5, Sección 31, cuando $z = x$. Ver la nota a pie de página a ese ejercicio.

c) Argumentar cómo el integrando en la representación de la parte *b*) se puede escribir $(s + 1)^n/(s - 1)$ si $z = 1$. Aplicar entonces la fórmula integral de Cauchy para probar que $P_n(1) = 1$ $(n = 0, 1, 2, ...)$. Análogamente, probar que $P_n(-1) = (-1)^n$ $(n = 0, 1, 2, ...)$.

42. MODULOS MAXIMOS DE FUNCIONES

En esta sección deduciremos varios resultados importantes relacionados con los valores máximos de los módulos de funciones analíticas.

Lema. *Sea $f(z)$ analítica en un entorno $|z - z_0| < \varepsilon$ de un punto z_0. Si $|f(z)| \leqq |f(z_0)|$ para todo punto z de ese entorno, entonces $f(z)$ tiene valor constante $f(z_0)$ sobre ese entorno.*

Para probarlo, supongamos que f satisface las condiciones exigidas. Sea z_1 cualquier punto del entorno distinto del z_0, y sea ρ la distancia entre z_1 y z_0. Si C_ρ denota el círculo $|z - z_0| = \rho$, positivamente orientado, centrado en z_0 y que pasa por z_1 (Fig. 43), la fórmula integral de Cauchy nos dice que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho} \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}; \qquad [1]$$

y la representación paramétrica

$$z = z_0 + \rho e^{i\theta} \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

para C_ρ permite escribir la Ecuación [1] como

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta})\,d\theta. \qquad [2]$$

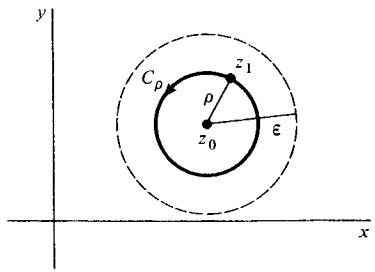


Figura 43

De [2] vemos que cuando una función es analítica dentro y sobre un círculo dado, su valor en el centro es la media aritmética de sus valores sobre el círculo. Este resultado se llama a veces el *teorema del valor medio de Gauss*.

De la Ecuación [2] obtenemos la desigualdad

$$|f(z_0)| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})|\,d\theta. \qquad [3]$$

Por otra parte, como

$$|f(z_0 + \rho e^{i\theta})| \leqq |f(z_0)| \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi), \qquad [4]$$

vemos que

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})|\,d\theta \leqq \int_0^{2\pi} |f(z_0)|\,d\theta = 2\pi |f(z_0)|.$$

Luego

$$|f(z_0)| \geqq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})|\,d\theta. \qquad [5]$$

Es evidente ahora de las desigualdades [3] y [5] que

$$|f(z_0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{i\theta})|\,d\theta,$$

o sea,

$$\int_0^{2\pi} [|f(z_0)| - |f(z_0 + \rho e^{i\theta})|]\,d\theta = 0.$$

El integrando en esta última integral es continuo en la variable θ; y en vista de la condición [4], es mayor o igual que cero sobre todo el intervalo $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$. Debido a que la integral vale cero, el integrando ha de ser idénticamente nulo. Esto es,

$$|f(z_0 + \rho e^{i\theta})| = |f(z_0)| \qquad (0 \leqq \theta \leqq 2\pi). \qquad [6]$$

Esto demuestra que $|f(z)| = |f(z_0)|$ *para todo punto z del círculo* $|z - z_0| = \rho$.

Finalmente, al ser z_1 un punto arbitrario del entorno punteado $0 < |z - z_0| < \varepsilon$, vemos que la ecuación $f(z) = f(z_0)$ se satisface, en efecto, en todos los puntos z que están sobre *cualquier* círculo $|z - z_0| < \rho$, con $0 < \rho < \varepsilon$. En consecuencia, $|f(z)| = |f(z_0)|$ sobre el entorno $|z - z_0| < \varepsilon$. Pero sabemos, por el Ejercicio 7*c*), Sección 21, que cuando el módulo de una función analítica es constante en un dominio, la propia función es constante en él. Luego $f(z) = f(z_0)$ en todo punto del entorno, y el lema queda demostrado.

Este lema puede utilizarse para probar el siguiente teorema, conocido como *principio del módulo máximo*.

Teorema. *Si una función f es analítica y no constante en un dominio dado D, $f(z)$ no tiene valor máximo en D. Es decir, no hay ningún punto z_0 en el dominio tal que $|f(z)| \leqq |f(z_0)|$ para todo punto z en él.*

Dado que f satisface las condiciones del enunciado, probaremos el teorema suponiendo que $f(z)$ tiene un valor máximo en algún punto z_0 de D y llegado a una contradicción.

Comenzamos observando que, al ser D un abierto *conexo* (Sec. 8), existe una línea poligonal L, formada por un número finito de segmentos rectos unidos entre sí, contenida en D, que va desde z_0 hasta cualquier otro punto P en D. Sea d la mínima distancia de puntos de L a la frontera de D, a menos que D sea todo el plano, en cuyo caso d es cualquier número positivo. Entonces formamos una sucesión finita de puntos $z_0, z_1, z_2, ..., z_n$ a lo largo de L, donde el punto z_n coincide con P (Fig. 44) y donde cada punto está lo bastante próximo a los adyacentes como para que

$$|z_k - z_{k-1}| < d \qquad (k = 1, 2, ..., n).$$

Finalmente, construimos una sucesión finita de entornos $N_0, N_1, N_2, ..., N_n$, donde cada N_k está centrado en z_k y tiene radio d. Nótese que estos entornos están todos contenidos en D, y que el centro z_k de cada N_k ($k = 1, 2, ..., n$) está en el entorno precedente N_{k-1}.

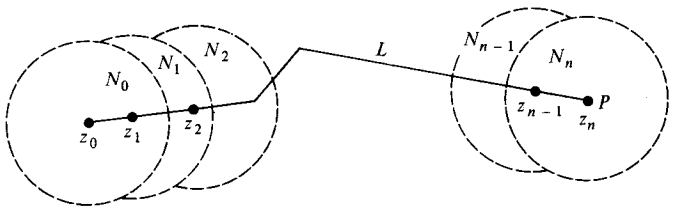


Figura 44

Como se ha supuesto que $|f(z)|$ tiene un máximo valor en D, que se alcanza en z_0, tiene también un máximo valor en N_0 en ese punto. Por tanto, de acuerdo con el lema precedente, $f(z)$ tiene el valor constante $f(z_0)$ sobre N_0. En particular, $f(z_1) = f(z_0)$, lo cual significa que $|f(z)| \leqq |f(z_1)|$ para todo z en N_1; y se puede aplicar de nuevo el lema, que esta vez lleva a que

$$f(z) = f(z_1) = f(z_0)$$

cuando z está en N_1. Como z_2 está en N_1, $f(z_2) = f(z_0)$. Luego $|f(z)| \leqq |f(z_2)|$ cuando z está en N_2; y el lema se aplica otra vez, concluyendo que

$$f(z) = f(z_2) = f(z_0)$$

cuando z está en N_2. Continuando así, alcanzaremos eventualmente el entorno N_n y llegaremos a establecer que $f(z_n) = f(z_0)$.

Puesto que z_n coincide con P, que es un punto arbitrario de D distinto de z_0, podemos concluir que $f(z) = f(z_0)$ para *todo* punto z de D. Pero esto contradice la hipótesis del teorema de que f no era constante en D. Por lo tanto, nuestra suposición de que $f(z)$ tiene un valor máximo en D no es válida, y el teorema queda probado.

Si una función f que es analítica en cada punto del interior de una región acotada y cerrada R es además continua en R, el módulo $|f(z)|$ tiene un valor máximo en algún lugar de R (Sec. 14). Es decir, existe una constante no negativa M tal que $|f(z)| \leqq M$ en todo z de R, y la igualdad ocurre al menos en un punto. Si f es una función constante, entonces $|f(z)| = M$ para todo z en R. Sin embargo, si $f(z)$ no es constante, entonces, según el principio del módulo máximo, $|f(z)| \neq M$ para cualquier punto z en el interior de R. Llegamos así a un importante corolario del principio del módulo máximo.

Corolario. *Sea f una función continua en una región acotada cerrada R, y analítica y no constante en el interior de R. Entonces, el máximo valor de $|f(z)|$ en R que se alcanza siempre, y ocurre en algún lugar de la frontera de R, nunca en su interior.*

Ejemplo. Sea R la región rectangular $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq y \leqq 1$. El corolario nos dice que el módulo de la función entera $f(z) = \operatorname{sen} z$ tiene un valor máximo en R que ocurre en algún lugar de la frontera, y no en el interior de R. Esto se puede comprobar directamente escribiendo (véase Sec. 24)

$$|f(z)| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{senh}^2 y}$$

y observando que, en R, $\operatorname{sen} 2x$ es máximo cuando $x = \pi/2$, y que la función creciente $\operatorname{senh} 2y$ es máxima cuando $y = 1$. Así que el valor máximo de $f(z)$ en R ocurre en el punto de la frontera $z = (\pi/2) + i$ y sólo en él.

Cuando la función f del corolario se expresa como $f(x) = u(x, y) + iv(x, y)$, *la función componente $u(x, y)$ también tiene un máximo valor en R que se alcanza en la frontera de R y nunca en su interior*, donde es armónica. Porque la función compuesta $g(z) = \exp[f(z)]$ es continua en R y analítica y no constante en el interior. En consecuencia, su módulo $|g(z)| = \exp[u(x, y)]$, que es continuo en R, debe alcanzar su valor máximo sobre R en la frontera. Como la función exponencial es creciente, se sigue que el valor máximo de $u(x, y)$ también se alcanza en la frontera.

Las propiedades de los valores *mínimos* de $f(z)$ y $u(x, y)$ se tratan en los ejercicios.

43. EL TEOREMA DE LIOUVILLE Y EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ALGEBRA

Cuando f es analítica dentro de y sobre un círculo $z - z_0 = R$, denotado por C y recorrido en sentido positivo, sabemos por la Sección 40 que

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Ahora bien, el máximo valor de $f(z)$ sobre C depende, en general, del radio de C, y si denotamos por M_R ese valor máximo, se sigue la *desigualdad de Cauchy:*

$$|f^{(n)}(z_0)| \leqq \frac{n!M_R}{R^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \qquad [1]$$

En particular, para $n = 1$,

$$|f'(z_0)| \leqq \frac{M_R}{R}. \qquad [2]$$

A partir de aquí es fácil demostrar que ninguna función entera, salvo las constantes, puede ser acotada en todo el plano complejo, tal como afirma en forma ligeramente diferente este *teorema de Liouville.*

Teorema 1. *Si f es entera y acotada en todo el plano complejo, $f(z)$ es constante en el plano.*

Para iniciar la demostración, hagamos notar que, al ser f entera, la desigualdad [2] es válida para cualquier elección de z_0 y de R. La acotación de f nos dice que existe una constante positiva M tal que $|f(z)| \leqq M$ para todo z; y, debido a que la constante M_R en [2] es siempre menor o igual que M, se deduce que

$$|f'(z_0)| \leqq \frac{M}{R}, \qquad [3]$$

donde z_0 es cualquier punto fijo del plano y R es arbitrariamente grande. Ahora bien, el número M en [3] es independiente del valor de R escogido. Por tanto, la desigualdad puede mantenerse para valores arbitrariamente grandes de R sólo si $f'(z_0) = 0$. Ya que la elección de z_0 fue arbitraria, eso significa que $f'(z) = 0$ en todo el plano complejo. Luego f es una función constante (Sec. 20).

El próximo teorema, conocido como el *teorema fundamental del álgebra,* se desprende fácilmente del de Liouville.

Teorema 2. *Todo polinomio*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n \qquad (a_n \neq 0)$$

de grado n ($n \geqq 1$) tiene al menos un cero. Esto es, existe al menos un punto z_0 tal que $P(z_0) = 0$.

Lo demostraremos por reducción al absurdo. Supongamos que $P(z)$ no se anulase en ningún z. Entonces la función

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

sería entera, y también acotada, en el plano complejo.

Para ver que es acotada, pongamos

$$w = \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_2}{z^{n-2}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{z}, \qquad [4]$$

así que $P(z) = (a_n + w)z^n$. Observamos que se puede encontrar un número positivo R suficientemente grande como para que el módulo de cada uno de los cocientes de [4] sea menor que el número $|a_n|/(2n)$ cuando $z > R$. La desigualdad triangular generalizada, aplicada a n números complejos, muestra que $|w| < |a_n|/2$ para tales valores de z. Por consiguiente, cuando $|z| > R$,

$$|a_n + w| \geqq ||a_n| - |w|| > \frac{|a_n|}{2};$$

y esto nos permite escribir

$$|f(z)| = \frac{1}{|P(z)|} = \frac{1}{|a_n + w||z|^n} < \frac{2}{|a_n|R^n} \qquad (|z| > R).$$

Luego f es acotada en la región *exterior* al disco $|z| \leqq R$. Pero f es continua en ese disco cerrado, y eso quiere decir que f allí es acotada también. Luego f es acotada en todo el plano.

Se sigue ahora ya del teorema de Liouville que $f(z)$, y por tanto $P(z)$, es constante. Pero P no era constante, de modo que hemos llegado a una contradicción*.

En cursos de álgebra elemental, el teorema fundamental se suele enunciar sin demostración. Como consecuencia suya se demuestra, entonces, que un polinomio de grado n ($n \geqq 1$) tiene no más de n ceros distintos.

EJERCICIOS

1. Sea f continua en una región acotada cerrada R, y analítica y no constante en el interior de R. Supuesto que $f(z) \neq 0$ en todos los puntos de R, probar que $|f(z)|$ tiene un *valor mínimo* m en R que se alcanza en la frontera de R, nunca en su interior. Usar

* Para una demostración interesante del teorema fundamental vía el teorema de Cauchy-Goursat, véase R. P. Boas, Jr., *Amer. Math. Monthly,* Vol. 71, Núm. 2, p. 180, 1964.

a tal fin el resultado correspondiente para el valor máximo (Sec. 42) de la función $F(z) = 1/f(z)$.

2. Usar la función $f(z) = z$ para demostrar que en el Ejercicio 1 la condición $f(z) \neq 0$ es necesaria para llegar al resultado del ejercicio. Esto es, probar que $|f(z)|$ *puede* alcanzar su valor mínimo en un punto interior cuando ese valor mínimo es cero.

3. Considerar la función $f(z) = (z + 1)^2$ y la región triangular cerrada R con vértices en los puntos $z = 0$, $z = 2$ y $z = i$. Hallar puntos en R en los que $|f(z)|$ alcance sus valores máximo y mínimo, ilustrando así los resultados de la Sección 42 y del Ejercicio 1.

   Sugerencia: Interpretar $|f(z)|$ como el cuadrado de la distancia entre z y -1.

   Sol. $z = 2, z = 0$.

4. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ continua en una región acotada cerrada R, y analítica y no constante en el interior de R. Probar que la función componente $u(x, y)$ tiene en R un valor mínimo que se alcanza en la frontera de R y nunca en su interior. (Véase Ej. 1.)

5. Sea $f(z) = e^z$ y sea R la región rectangular $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq \pi$. Ilustrar los resultados de la Sección 42 y del Ejercicio 4, hallando puntos de R donde la función componente $u(x, y) = \text{Re}[f(z)]$ alcanza sus valores máximo y mínimo.

   Sol. $z = 1$, $z = 1 + \pi i$.

6. Supóngase que $f(z)$ es entera y que la función armónica $u(x, y) = \text{Re}[f(z)]$ tiene una cota superior, es decir, $u(x, y) \leqq u_0$ en todo punto (x, y) del plano xy. Probar que $u(x, y)$ ha de ser constante en el plano.

   Sugerencia: Aplicar el teorema de Liouville (Sec. 43) a la función $g(z) = \exp[f(z)]$.

7. Sea la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ continua en una región cerrada y acotada R, y supongamos que es analítica y no constante en el interior de R. Probar que la función componente $v(x, y)$ tiene en R valores máximo y mínimo que se alcanzan en la frontera de R y jamás en el interior, donde es armónica.

   Sugerencia: Aplicar los resultados de la Sección 42 y del Ejercicio 4 a la función $g(z) = -if(z)$.

8. Sea f una función entera tal que $|f(z)| \leqq A|z|$ para todo z, donde A es un número positivo fijo. Demostrar que $f(z) = a_1 z$, donde a_1 es una constante compleja.

   Sugerencia: Usar la desigualdad de Cauchy (Sec. 43) para probar que la segunda derivada $f''(z)$ es cero en todo el plano. Nótese que la constante M_R en la desigualdad de Cauchy es menor o igual que $A(|z_0| + R)$.

CAPITULO

CINCO

SERIES

Este capítulo está dedicado principalmente a las representaciones de funciones analíticas por series. Presentamos teoremas que garantizan la existencia de tales representaciones, y adquirimos cierta destreza en el manejo de series.

44. CONVERGENCIA DE SUCESIONES Y SERIES

Una *sucesión* infinita

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots \qquad [1]$$

de números complejos tiene *límite* z si, para cada número positivo ε, existe un número positivo n_0 tal que

$$|z_n - z| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n > n_0.$$

Geométricamente, esto significa que para valores suficientemente grandes de n, los puntos z_n están a cualquier ε entorno dado de z (Fig. 45). Como podemos elegir ε todo lo pequeño que queramos, se deduce que los puntos z_n se acercan arbitrariamente al z cuando sus subíndices crecen. Nótese que el valor de n_0 necesario dependerá, en general, del valor de ε.

La sucesión [1] puede tener a lo sumo un límite. Esto es, un límite z es único, si existe (Ej. 6). Cuando existe límite, se dice que la sucesión *converge* a z, y escribimos

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z.$$

Si la sucesión no tiene límite, *diverge*.

Teorema 1. *Supongamos que* $z_n = x_n + iy_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *y* $z = x + iy$. *Entonces*

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z \qquad [2]$$

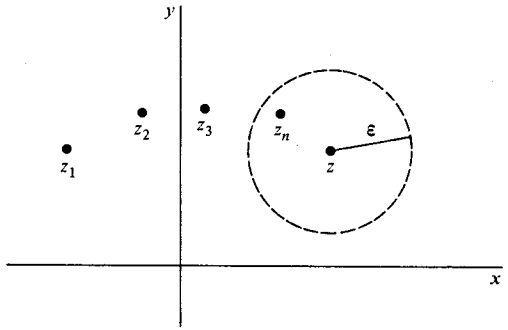


Figura 45

si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad y \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y. \tag{3}$$

Para probarlo, supondremos primero que la condición [2] es válida y obtendremos de ella las condiciones [3]. Según [2], para cada número positivo ε existe un entero positivo n_0 tal que

$$|(x_n - x) + i(y_n - y)| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad n > n_0.$$

Ahora

$$|x_n - x| \leqq |(x_n - x) + i(y_n - y)| \quad \text{y} \quad |y_n - y| \leqq |(x_n - x) + i(y_n - y)|.$$

Por tanto,

$$|x_n - x| < \varepsilon \quad \text{y} \quad |y_n - y| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n > n_0;$$

es decir, las condiciones [3] se satisfacen.

Recíprocamente, si partimos de [3] sabemos que para cada número positivo ε existen enteros positivos n_1 y n_2 tales que

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si} \quad n > n_1$$

y

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si} \quad n > n_2.$$

Por tanto, si n_0 es el mayor de los dos enteros n_1 y n_2, entonces

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si} \quad n > n_0.$$

Pero

$$|(x_n - x) + i(y_n - y)| \leqq |x_n - x| + |y_n - y|,$$

luego

$$|z_n - z| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n > n_0.$$

La condición [2] es válida, en consecuencia.

Una *serie* infinita

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots \tag{4}$$

de número complejos *converge* con *suma* S si la sucesión

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_N \qquad (N = 1, 2, \ldots)$$

de *sumas parciales* converge a S; escribimos en tal caso

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S.$$

Nótese que como una sucesión puede tener a lo sumo un límite, una serie puede tener a lo más una suma. Cuando una serie no converge se dice que es *divergente*.

Teorema 2. *Supongamos que* $z_n = x_n + iy_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *y* $S = X + iY$. *En tal caso,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \tag{5}$$

si y sólo si

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = X \quad y \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y. \tag{6}$$

La demostración está basada en el Teorema 1. Sea S_N la suma parcial de los N primeros términos de la serie en la condición [5], y observemos que

$$S_N = X_N + iY_N, \tag{7}$$

donde

$$X_N = \sum_{n=1}^{N} x_n \quad \text{e} \quad Y_N = \sum_{n=1}^{N} y_n.$$

Ahora bien, [5] se cumple si y sólo si

$$\lim_{N\to\infty} S_N = S;$$

y, a la vista de la relación [7] y del Teorema 1, esta condición es válida si y sólo si

$$\lim_{N\to\infty} X_N = X \quad \text{y} \quad \lim_{N\to\infty} Y_N = Y. \qquad [8]$$

Así que [5] implica las [8], y recíprocamente. Como X_N e Y_N son las sumas parciales de las series en [6], el Teorema 2 queda probado.

Recordando el cálculo que el n-ésimo término de una serie convergente de números reales tiende a cero cuando n tiende a infinito, vemos inmediatamente de los Teoremas 1 y 2 que lo mismo es cierto para una serie convergente de números complejos. Esto es, *una condición necesaria para la convergencia de la serie* [4] *es que*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0. \qquad [9]$$

Los términos de una serie convergente de números complejos son, por tanto, acotados. Más precisamente, existe una constante positiva M tal que $|z_n| \leq M$ para cada entero positivo n. (Véase Ej. 10.)

Para otra propiedad importante de las series de números complejos, suponemos que la serie [4] es *absolutamente convergente*. Es decir, si $z_n = x_n + iy_n$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

de números reales $\sqrt{x_n^2 + y_n^2}$ converge. Como

$$|x_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \quad \text{y} \quad |y_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2},$$

sabemos por el criterio de comparación real que las dos series

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$$

convergen. Además, ya que la convergencia absoluta de una serie de números reales implica la convergencia de la propia serie, se sigue que existen números reales X e Y tales que se verifica [6]. De acuerdo con el Teorema 2, la serie [4] converge, por tanto. Por consiguiente, *la convergencia absoluta de una serie de números complejos implica la convergencia de esa serie.*

Al establecer el hecho de que la suma de una serie es un número S dado, es conveniente con frecuencia definir el resto ρ_N tras N términos:

$$\rho_N = S - S_N. \qquad [10]$$

Luego, $S = S_N + \rho_N$; y, ya que $|S_N - S| = |\rho_N - 0|$, vemos que *una serie converge a un número S si y sólo si la sucesión de restos tiende a cero.* Utilizaremos a menudo esta observación al tratar con *series de potencias.* Son series de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots,$$

donde z_0 y los coeficientes a_n son constantes complejas, y z cualquier punto en una región prefijada que contenga a z_0. En tales series, que involucran a una variable z, denotaremos las sumas, sumas parciales y restos por $S(z)$, $S_N(z)$, y $\rho_N(z)$, respectivamente.

EJERCICIOS

1. Probar de dos maneras que la sucesión

$$z_n = -2 + i\frac{(-1)^n}{n^2} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

converge a -2.

2. Sean r_n los módulos y Θ_n los argumentos principales de los números complejos z_n del Ejercicio 1. Demostrar que la sucesión r_n $(n = 1, 2, \ldots)$ converge, pero la sucesión Θ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ no converge.

3. Probar que

$$\text{si} \quad \lim_{n\to\infty} z_n = z, \quad \text{entonces} \quad \lim_{n\to\infty} |z_n| = |z|.$$

4. Considerando los restos $\rho_N(z)$, comprobar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{z}{1 - z} \quad \text{para} \quad |z| < 1.$$

Sugerencia: Usar la identidad (Ej. 18, Sec. 7)

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^N = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z} \qquad (z \neq 1)$$

para probar que $\rho_N(z) = z^{N+1}/(1 - z)$.

5. Escribamos $z = re^{i\theta}$, con $0 < r < 1$, en la fórmula de suma obtenida en el Ejercicio 4. Probar entonces, con ayuda del Teorema 2 de la Sección 44, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{r\cos\theta - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} r^n \operatorname{sen} n\theta = \frac{r \operatorname{sen}\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$$

cuando $0 < r < 1$. (Nótese que estas fórmulas son asimismo válidas cuando $r = 0$.)

6. Probar que el límite de una sucesión convergente de números complejos es único, recurriendo al correspondiente resultado para las sucesiones reales.

7. Demostrar que

$$\text{si} \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n = S, \quad \text{entonces} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \bar{z}_n = \bar{S}.$$

8. Sea c cualquier número complejo. Probar que

$$\text{si} \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n = S, \quad \text{entonces} \quad \sum_{n=1}^{\infty} cz_n = cS.$$

9. Teniendo en cuenta el resultado análogo para series reales, y por referencia al Teorema 2 de la Sección 44, probar que si

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} w_n = T,$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} (z_n + w_n) = S + T.$$

10. Sea una sucesión z_n $(n = 1, 2, ...)$ que converge a un número z. Probar que existe un número positivo M tal que $|z_n| \leqq M$ para todo n. Hacer esto de las dos maneras que se indican:

   a) Notar que existe un entero positivo n_0 tal que

$$|z_n| = |z + (z_n - z)| < |z| + 1$$

   siempre que $n > n_0$.

   b) Escribir $z_n = x_n + iy_n$ y recordar de la teoría de sucesiones reales que la convergencia de x_n e y_n $(n = 1, 2, ...)$ implica que $|x_n| \leqq M_1$ e $|y_n| \leqq M_2$ $(n = 1, 2, ...)$ para ciertos números positivos M_1 y M_2.

45. SERIES DE TAYLOR

Vamos a enunciar el *teorema de Taylor*, uno de los resultados más importantes del capítulo.

Teorema. *Sea f una función analítica en un disco abierto $|z - z_0| < R_0$, centrado en z_0 y de radio R_0 (Fig. 46). Entonces, en todo punto z de ese disco, $f(z)$ admite la representación en serie*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \qquad (|z - z_0| < R_0), \qquad [1]$$

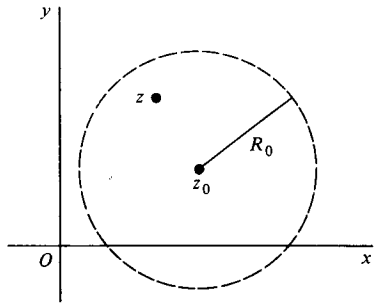


Figura 46

donde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, ...). \qquad [2]$$

Esto es, esa serie de potencias converge a $f(z)$ cuando $|z - z_0| < R_0$.

Este es el desarrollo de $f(z)$ en *serie de Taylor* en torno al punto z_0. Es la familiar serie de Taylor del Cálculo, adaptada a funciones de una variable compleja. Hagamos notar que, con el convenio de que $f^{(0)}(z_0) = f(z_0)$ y $0! = 1$, la serie [1] puede escribirse

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots \qquad (|z - z_0| < R_0). \qquad [3]$$

Obsérvese además que cuando f es *entera*, el radio R_0 del disco puede tomarse arbitrariamente grande. En estas circunstancias, la serie converge a $f(z)$ en todo punto z del plano finito, y la condición de validez se convierte en $|z - z_0| < \infty$.

Demostramos primero el teorema con $z_0 = 0$; la demostración para el caso z_0 arbitrario será consecuencia inmediata. Para empezar, sea C_0 cualquier círculo positivamente orientado $|z| = r_0$ contenido en el disco $|z| < R_0$, pero lo bastante grande como para que el punto z sea interior a él (Fig. 47). La fórmula integral de Cauchy se aplica entonces:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(s)\, ds}{s - z}. \qquad [4]$$

Ahora bien,

$$\frac{1}{s - z} = \frac{1}{s}\left[\frac{1}{1 - (z/s)}\right];$$

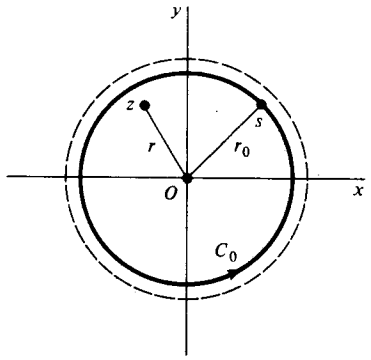


Figura 47

y, por el Ejercicio 18, Sección 7

$$\frac{1}{1-c} = 1 + c + c^2 + \cdots + c^{N-1} + \frac{c^N}{1-c} \qquad (N = 1, 2, \ldots)$$

cuando c es cualquier número complejo distinto de la unidad. Por tanto,

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s}\left[1 + \left(\frac{z}{s}\right) + \left(\frac{z}{s}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z}{s}\right)^{N-1} + \frac{(z/s)^N}{1-(z/s)}\right];$$

y, en consecuencia,

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}z + \frac{1}{s^3}z^2 + \cdots + \frac{1}{s^N}z^{N-1} + z^N\frac{1}{(s-z)s^N}.$$

A continuación, multiplicamos esta ecuación por $f(s)/(2\pi i)$, e integramos cada uno de sus miembros a lo largo de C_0 respecto de s. A la vista de [4] y de que (Sec. 40)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(s)\,ds}{s^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

podemos escribir el resultado como sigue:

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{f^{(N-1)}(0)}{(N-1)!}z^{N-1} + \rho_N(z), \qquad [5]$$

donde

$$\rho_N(z) = \frac{z^N}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{f(s)\,ds}{(s-z)s^N}. \qquad [6]$$

Supongamos que $|z| = r$. Entonces, si s es un punto de C_0,

$$|s - z| \geqq ||s| - |z|| = r_0 - r.$$

Así pues, si M denota el valor máximo de $|f(s)|$ sobre C_0,

$$|\rho_N(z) \leqq \frac{r^N}{2\pi}\frac{M}{(r_0 - r)r_0^N}2\pi r_0 = \frac{Mr_0}{r_0 - r}\left(\frac{r}{r_0}\right)^N.$$

Pero $(r/r_0) < 1$ ya que z es interior a C_0; luego

$$\lim_{N\to\infty}\rho_N(z) = 0.$$

Luego vemos de la Ecuación [5] que

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \cdots \qquad [7]$$

en el disco abierto $|z| < R_0$. Esto es,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n \qquad (|z| < R_0). \qquad [8]$$

Este caso especial de la serie [1] en que $z_0 = 0$ se llama una *serie de Maclaurin*.

Supongamos ahora que f es como en el enunciado del teorema, donde el disco de radio R_0 está centrado en un punto arbitrario z_0. Como f es analítica cuando $|z - z_0| < R_0$, la función compuesta $f(z + z_0)$ es analítica cuando $|(z + z_0) - z_0| < R_0$. Pero esta condición no es sino $|z| < R_0$, y si llamamos $g(z) = f(z + z_0)$, la analiticidad de g en el disco $|z| < R_0$ asegura la existencia de una representación en serie de Maclaurin:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(0)}{n!}z^n \qquad (|z| < R_0).$$

Es decir,

$$f(z + z_0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}z^n \qquad (|z| < R_0).$$

Finalmente, sustituyendo z por $z - z_0$ en esta ecuación y en su condición de validez, llegamos a la deseada representación en serie de Taylor para $f(z)$ en torno al punto z_0.

46. EJEMPLOS

Si se sabe que f es analítica en todos los puntos interiores a un círculo centrado en z_0, queda garantizada la convergencia de la serie de Taylor centrada en z_0

hacia el valor $f(z)$ en cada uno de esos puntos z; no es necesario ningún criterio de convergencia. En efecto, de acuerdo con el teorema de Taylor, la serie converge a $f(z)$ dentro del círculo centrado en z_0 cuyo radio es la distancia de z_0 al punto z_1 más próximo en el que f deje de ser analítica. En la Sección 50 veremos que ése es realmente el mayor círculo centrado en z_0 en el que la serie converge a $f(z)$ para todo punto interior a él.

Asimismo, veremos en la Sección 51 que si existen constantes a_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ tales que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

para todo punto z interior a algún círculo centrado en z_0, entonces la serie de potencias allí ha de ser la serie de Taylor para f en torno a z_0, independientemente de cómo aparezcan esas constantes. Esta observación permite a menudo calcular los coeficientes a_n de la serie de Taylor de modo más eficiente que por la aplicación directa de la fórmula $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ del teorema de Taylor.

En los ejemplos que siguen, utilizamos la fórmula del teorema de Taylor para hallar los desarrollos en serie de Maclaurin de algunas funciones muy sencillas.

Ejemplo 1. Como la función $f(z) = e^z$ es entera, tiene una representación en serie de Maclaurin válida para todo z. Aquí es $f^{(n)}(z) = e^z$, luego $f^{(n)}(0) = 1$, de modo que

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (|z| < \infty). \qquad [1]$$

Nótese que si $z = x + i0$, el desarrollo [1] se convierte en

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (-\infty < x < \infty).$$

La función entera z^2e^{3z} tiene también desarrollo en serie de Maclaurin. La forma más simple de obtenerla es sustituir z por $3z$ en cada lado de [1] y multiplicar después la ecuación resultante por z^2 (véase Ej. 8, Sec. 44):

$$z^2e^{3z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} z^{n+2} \qquad (|z| < \infty).$$

Finalmente, si sustituimos n por $n - 2$ aquí, tenemos

$$z^2e^{3z} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^{n-2}}{(n-2)!} z^n \qquad (|z| < \infty).$$

Ejemplo 2. Si $f(z) = \operatorname{sen} z$, entonces

$$f^{(2n)}(0) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n \qquad (n = 0, 1, 2, ...).$$

Por tanto,

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (|z| < \infty). \qquad [2]$$

La condición $|z| < \infty$ se sigue de nuevo del carácter entero de la función.

Puesto que $\operatorname{senh} z = -i \operatorname{sen} (iz)$ (Sec. 25), basta cambiar z por iz en cada lado de [2] y multiplicar el resultado por $-i$ para ver que

$$\operatorname{senh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (|z| < \infty). \qquad [3]$$

Ejemplo 3. Cuando $f(z) = \cos z$,

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n \quad \text{y} \quad f^{(2n+1)}(0) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, ...).$$

De manera que esa función entera tiene la representación en serie de Maclaurin

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad (|z| < \infty); \qquad [4]$$

y, como $\cosh z = \cos (iz)$,

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad (|z| < \infty). \qquad [5]$$

Nótese que la serie de Taylor para $\cosh z$ en torno al punto $z_0 = -2\pi i$ se obtiene sustituyendo la variable z por $z + 2\pi i$ en los dos miembros de la Ecuación [5] y recordando que $\cosh (z + 2\pi i) = \cosh z$ para todo z:

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + 2\pi i)^{2n}}{(2n)!} \qquad (|z| < \infty).$$

Ejemplo 4. Otra representación en serie de Maclaurin es

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (|z| < 1). \qquad [6]$$

Las derivadas de la función $f(z) = 1/(1 - z)$, que no es analítica en $z = 1$, son

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, ...);$$

y, en particular, $f^{(n)}(0) = n!$ Obsérvese que el desarrollo [6] nos da la suma de una *serie geométrica* infinita, siendo z el radio común términos adyacentes:

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \frac{1}{1 - z} \qquad (|z| < 1).$$

Esta es esencialmente la fórmula de suma que se halló por otro camino en el Ejercicio 4, Sección 44.

Si sustituimos $-z$ por z en la Ecuación [6] y en su condición de validez, y tenemos en cuenta que $|z| < 1$ cuando $|-z| < 1$, vemos que

$$\frac{1}{1 + z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \qquad (|z| < 1).$$

Si, por otro lado, sustituimos en [6] la variable z por $1 - z$, obtenemos la representación en serie de Taylor

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1)^n \qquad (|z - 1| < 1).$$

Esta condición de validez se sigue de la asociada con el desarrollo [6], pues $|1 - z| < 1$ es lo mismo que $|z - 1| < 1$.

Ejemplo 5. Como último ejemplo, vamos a desarrollar la función

$$f(z) = \frac{1 + 2z^2}{z^3 + z^5} = \frac{1}{z^3}\left[\frac{2(1 + z^2) - 1}{1 + z^2}\right] = \frac{1}{z^3}\left(2 - \frac{1}{1 + z^2}\right)$$

en forma de una serie de potencias de z. No podemos hallar una serie de Maclaurin para f porque no es analítica en $z = 0$. Pero sabemos por [6] que

$$\frac{1}{1 + z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - \cdots \qquad (|z| < 1).$$

Así pues, si $0 < |z| < 1$,

$$f(z) = \frac{1}{z^3}(2 - 1 + z^2 - z^4 + z^6 - z^8 + \cdots) =$$

$$= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} - z + z^3 - z^5 + \cdots.$$

Llamaremos a los términos como $1/z^3$ y $1/z$ potencias *negativas* de z, pues se pueden expresar como z^{-3} y z^{-1}, respectivamente. La teoría de desarrollos que hacen entrar en escena potencias negativas de $z - z_0$ se discutirá en la próxima sección.

EJERCICIOS*

1. Hallar la representación en serie de Maclaurin

$$z \cosh(z^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n+1}}{(2n)!} \qquad (|z| < \infty).$$

2. Demostrar que

$$e^z = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - 1)^n}{n!} \qquad (|z| < \infty).$$

3. Hallar la serie de Maclaurin de la función

$$f(z) = \frac{z}{z^4 + 9} = \frac{z}{9}\left[\frac{1}{1 + (z^4/9)}\right].$$

Sol. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+2}} z^{4n+1}$ $(|z| < \sqrt{3})$.

4. Escribir la representación en serie de Maclaurin de $f(z) = \operatorname{sen}(z^2)$, y explicar cómo se deduce que

$$f^{(4n)}(0) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(2n+1)}(0) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

5. Deducir la representación en serie de Taylor

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - i)^n}{(1 - i)^{n+1}} \qquad (|z - i| < \sqrt{2}).$$

Sugerencia: Comenzar escribiendo

$$\frac{1}{1 - z} = \frac{1}{(1 - i) - (z - i)} = \frac{1}{1 - i}\left[\frac{1}{1 - (z - i)/(1 - i)}\right].$$

6. Desarrollar $\cos z$ en serie de Taylor centrada en el punto $z = \pi/2$.

7. Desarrollar $\operatorname{senh} z$ en serie de Taylor centrada en el punto $z = \pi i$.

8. ¿Cuál es el mayor círculo en cuyo interior la serie de Maclaurin de la función $\operatorname{tgh} z$ converge a $\operatorname{tgh} z$? Escribir los dos primeros términos no nulos de esa serie.

9. Usar la relación $\operatorname{sen} z = (e^{iz} - e^{-iz})/(2i)$, junto con los Ejercicios 8 y 9 de la Sección 44, al justificar ciertos pasos, para deducir la seie de Maclaurin de $\operatorname{sen} z$ a partir de la de e^z.

10. Probar que si $z \neq 0$,

a) $\dfrac{\operatorname{sen}(z^2)}{z^4} = \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{z^2}{3!} + \dfrac{z^6}{5!} - \dfrac{z^{10}}{7!} + \cdots$; *b)* $\dfrac{\operatorname{senh} z}{z^2} = \dfrac{1}{z} + \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n + 3)!}$.

* En estos y en sucesivos ejercicios sobre desarrollos en serie, se recomienda al lector que use, siempre que sea posible, las representaciones [1] a [6] de la Sección 46.

11. Demostrar que para $0 < |z| < 4$,

$$\frac{1}{4z - z^2} = \frac{1}{4z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{4^{n+2}}.$$

47. SERIES DE LAURENT

Si una función f no es analítica en un punto z_0, no podemos aplicar el teorema de Taylor en ese punto. No obstante, es posible hallar una representación en serie para $f(z)$ que contenga tanto potencias positivas como negativas de $z - z_0$ (véase Ejemplo 5, Sec. 46). Ahora presentamos la teoría de tales representaciones, comenzando con el *teorema de Laurent*.

Teorema. *Sea f una función analítica en un dominio anular $R_1 < |z - z_0| < R_2$, y sea C cualquier contorno cerrado simple en torno de z_0, orientado positivamente, contenido en ese dominio (Fig. 48). Entonces, en todo punto z de ese dominio, $f(z)$ admite la representación en serie*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \qquad (R_1 < |z - z_0| < R_2), \qquad [1]$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad [2]$$

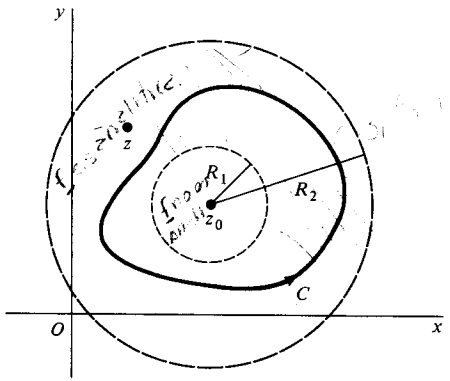


Figura 48

y

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{-n+1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \qquad [3]$$

El desarrollo [1] se suele escribir

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \qquad (R_1 < |z - z_0| < R_2), \qquad [4]$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad [5]$$

Cualquiera de las dos formas [1] o [4], se llama una *serie de Laurent*.

Nótese que el integrando en [3] se puede escribir $f(z)(z - z_0)^{n-1}$. Así pues, es claro que cuando f es analítica en el disco $|z - z_0| < R_2$, este integrando lo es también. Por tanto, todos los coeficientes b_n son cero, y como (Sec. 40)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

el desarrollo [1] se reduce a una serie de Taylor centrada en z_0.

Sin embargo, si f no es analítica en z_0 pero lo es en el resto del disco $|z - z_0| < R_2$, el radio R_1 puede tomarse arbitrariamente pequeño. La representación [1] es válida entonces para $0 < |z - z_0| < R_2$. Análogamente, si f es analítica en todo punto del plano finito exterior al círculo $|z - z_0| = R_1$, la condición de validez es $R_1 < |z - z_0| < \infty$.

Demostraremos primero el teorema de Laurent cuando $z_0 = 0$, en cuyo caso el anillo está centrado en el origen. La verificación del teorema para z_0 arbitrario se deducirá sin dificultad.

Empezamos la demostración formando una región anular cerrada $r_1 \leqq |z| \leqq r_2$, contenida en el dominio $R_1 < |z| < R_2$, cuyo interior contiene al punto z y al contorno C (Fig. 49). Sean C_1 y C_2 los círculos de radios respectivos r_1 y r_2,

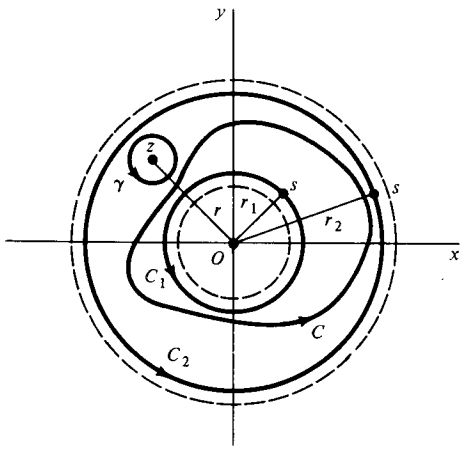


Figura 49

centrados en el origen, orientados ambos en sentido positivo. Obsérvese que f es analítica en C_1 y C_2, así como en el dominio anular situado entre ellos.

A continuación, construimos un círculo γ orientado positivamente con centro en z y suficientemente pequeño como para que esté contenido en el interior del anillo $r_1 \leqq |z| \leqq r_2$, como indica la Figura 49. En tales circunstancias, se sigue de la extensión del teorema de Cauchy-Goursat a integrales de funciones analíticas a lo largo de contornos orientados de regiones múltiplemente conexas (Teorema 2, Sec. 38), que

$$\int_{C_2} \frac{f(s)\,ds}{s - z} - \int_{C_1} \frac{f(s)\,ds}{s - z} - \int_{\gamma} \frac{f(s)\,ds}{s - z} = 0.$$

Ahora bien, de acuerdo con la fórmula integral de Cauchy, el valor de la tercera integral es $2\pi i f(z)$. Por tanto,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s)\,ds}{s - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)\,ds}{s - z}. \qquad [6]$$

En la primera integral de [6] escribimos, como hicimos en la demostración del teorema de Taylor (Sec. 45),

$$\frac{1}{s - z} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} z + \frac{1}{s^3} z^2 + \cdots + \frac{1}{s^N} z^{N-1} + z^N \frac{1}{(s - z)s^N}. \qquad [7]$$

Por lo que se refiere a la segunda integral, hagamos notar que

$$-\frac{1}{s - z} = \frac{1}{z - s}.$$

En consecuencia, por simple intercambio de z y s en la Ecuación [7], escribimos

$$-\frac{1}{s - z} = \frac{1}{z} + \frac{1}{s^{-1}} \frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{1}{s^{-N+1}} \frac{1}{z^N} + \frac{1}{z^N} \left(\frac{s^N}{z - s} \right). \qquad [8]$$

Luego concluimos de [6] que

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_{N-1} z^{N-1} + \rho_N(z) + \\ + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \cdots + \frac{b_N}{z^N} + \sigma_N(z),$$

donde los números a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots, N - 1)$ y b_n $(n = 1, 2, \ldots, N)$ vienen dados por las ecuaciones

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s)\,ds}{s^{n+1}}, \quad b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(s)\,ds}{s^{-n+1}} \qquad [9]$$

y donde

$$\rho_N(z) = \frac{z^N}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(s)\,ds}{(s - z)s^N}, \quad \sigma_N(z) = \frac{1}{2\pi i z^N} \int_{C_1} \frac{s^N f(s)\,ds}{z - s}.$$

Ahora tomamos $|z| = r$, de modo que $r_1 < r < r_2$, y denotamos por M el valor máximo de $|f(s)|$ sobre C_1 y C_2. Para probar que los restos $\rho_N(z)$ y $\sigma_N(z)$ tienden a cero cuando N tiende a infinito, usamos un método ya empleado en la demostración del teorema de Taylor. Notemos que si s es un punto de C_2, entonces $|s - z| \geqq r_2 - r$; y si s está en C_1, $|z - s| \geqq r - r_1$. Así podemos escribir

$$|\rho_N(z)| \leqq \frac{M r_2}{r_2 - r} \left(\frac{r}{r_2} \right)^N \quad \text{y} \quad |\sigma_N(z)| \leqq \frac{M r_1}{r - r_1} \left(\frac{r_1}{r} \right)^N;$$

y, como $(r/r_2) < 1$ y $(r_1/r) < 1$, es claro que ambos, $r_N(z)$ y $s_N(z)$, tienen la propiedad deseada.

Finalmente, basta recordar el Corolario 2 de la Sección 38 para ver que los contornos usados en las integrales [9] se pueden reemplazar por el contorno C. Esto completa la demostración del teorema de Laurent cuando $z_0 = 0$, porque si se usa z en vez de s como variable de integración, las expresiones [9] para los coeficientes a_n y b_n son las mismas que [2] y [3] con $z_0 = 0$ en ellas.

Para extender la demostración al caso geneal en que z_0 es arbitrario, sea f una función que satisface las condiciones del teorema y, tal como se hizo en la demostración del teorema de Taylor, pongamos $g(z) = f(z + z_0)$. Puesto que f es analítica en el anillo $R_1 < |z - z_0| < R_2$, la función $f(z + z_0)$ es analítica cuando $R_1 < |(z + z_0) - z_0| < R_2$. Esto es, g es analítica en el anillo $R_1 < |z| < R_2$, centrado en el origen. Ahora bien, el contorno cerrado simple C en el enunciado del teorema tiene la representación paramétrica $z = z(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$, donde

$$R_1 < |z(t) - z_0| < R_2 \qquad [10]$$

para todo t en el intervalo $a \leqq t \leqq b$. Luego si Γ denota el camino $z = z(t) - z_0$ $(a \leqq t \leqq b)$, Γ es no sólo un contorno cerrado simple, sino que, a la vista de [10], está en el dominio $R_1 < z < R_2$. Por consiguiente, $g(z)$ admite la representación en serie de Laurent

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} \qquad (R_1 < |z| < R_2), \qquad [11]$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{g(z)\,dz}{z^{n+1}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad [12]$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(z)\,dz}{z^{-n+1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \qquad [13]$$

La representación [1] se obtiene si escribimos $f(z + z_0)$ en vez de $g(z)$ en la Ecuación [11] y sustituimos entonces z por $z - z_0$ en la ecuación resultante, así como en la condición de validez $R_1 < |z| < R_2$. La expresión [12] para los coeficientes a_n es, además, idéntica a la [2], ya que

$$\int_\Gamma \frac{g(z)\,dz}{z^{n+1}} = \int_a^b \frac{f[z(t)]z'(t)}{[z(t) - z_0]^{n+1}}\,dt = \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Análogamente, los coeficientes b_n en la expresión [13] son los mismos que los de la expresión [3].

48. EJEMPLOS

Los coeficientes de una serie de Laurent no se suelen hallar recurriendo al uso directo de sus representaciones integrales, sino por otros métodos, tal como ilustran los ejemplos siguientes, en los que se supone siempre que, una vez especificado el dominio anular, una serie de Laurent para la función dada es única. Al igual que con las series de Taylor, relegamos la demostración de tal unicidad a la Sección 51.

Ejemplo 1. Sustituyendo z por $1/z$ en la serie de Maclaurin

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \qquad (|z| < \infty),$$

obtenemos la serie de Laurent

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots \qquad (0 < |z| < \infty).$$

Nótese que esta serie de Laurent particular no contiene potencias positivas de z, siendo cero todos los coeficientes de las potencias positivas, mientras que hay infinitas potencias negativas. Nótese además que el coeficiente de $1/z$ es la unidad; y de acuerdo con el teorema de Laurent de la Sección 47, ese coeficiente es el número

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{1/z}\,dz,$$

donde C es cualquier contorno cerrado simple, orientado positivamente, en torno del origen. Como $b_1 = 1$, entonces

$$\int_C e^{1/z}\,dz = 2\pi i.$$

Este método de evaluar ciertas integrales a lo largo de contornos cerrados simples se desarrollará en detalle en el Capítulo 6.

Ejemplo 2. La función $f(z) = 1/(z - i)^2$ ya está en forma de serie de Laurent, con $z_0 = i$. Es decir,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - i)^n \qquad (0 < |z - i| < \infty),$$

donde $c_{-2} = 1$ y todos los demás coeficientes son cero. Según [5], Sección 47, para los coeficientes de una serie de Laurent,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{(z - i)^{n+3}} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

donde C es, por ejemplo, cualquier círculo orientado positivamente, centrado en el punto $z_0 = i$. Así pues (comparar con el Ej. 13, Sec. 33)

$$\int_C \frac{dz}{(z - i)^{n+3}} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -2, \\ 2\pi i & \text{si } n = -2. \end{cases}$$

Ejemplo 3. La función

$$f(z) = \frac{-1}{(z - 1)(z - 2)} = \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z - 2}, \qquad [1]$$

que tiene los dos puntos singulares $z = 1$ y $z = 2$, es analítica en los dominios $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$, y $2 < |z| < \infty$.En cada uno de estos dominios, denotados D_1, D_2 y D_3, respectivamente, en la Figura 50, $f(z)$ tiene representaciones en serie de potencias de z. Todas pueden hallarse recordando del Ejemplo 4, Sección 46, que

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (|z| < 1).$$

La representación en D_1 es una serie de Maclaurin. Para hallarla, escribimos

$$f(z) = -\frac{1}{1 - z} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - (z/2)}\right]$$

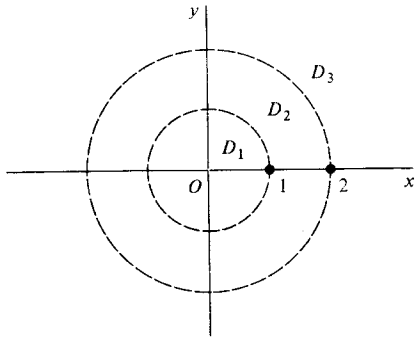


Figura 50

y observamos que al ser $|z| < 1$ y $|z/2| < 1$ en D_1,

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{-n-1} - 1)z^n \qquad (|z| < 1). \quad [2]$$

En cuanto a las representaciones en D_2, escribimos

$$f(z) = \frac{1}{z}\left[\frac{1}{1 - (1/z)}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - (z/2)}\right].$$

Como $|1/z| < 1$ y $|z/2| < 1$ cuando $1 < |z| < 2$, se deduce que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \qquad (1 < |z| < 2).$$

Si sustituimos el índice de suma n en la primera de esas series por $n - 1$ y entonces intercambiamos las dos series, llegamos a una expresión que tiene la misma forma que la del enunciado del teorema de Laurent (Sec. 47):

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n} \qquad (1 < |z| < 2). \quad [3]$$

Como existe sólo una tal representación para $f(z)$ en el anillo $1 < |z| < 2$, el desarrollo [3] es, de hecho, la serie de Laurent para $f(z)$ allí.

La representación de $f(z)$ en el dominio no acotado D_3 es también una serie de Laurent. Si ponemos [1] en la forma

$$f(z) = \frac{1}{z}\left[\frac{1}{1 - (1/z)}\right] - \frac{1}{z}\left[\frac{1}{1 - (2/z)}\right]$$

y observamos que $|1/z| < 1$ y $|2/z| < 1$ si $2 < |z| < \infty$, encontramos que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - 2^n}{z^{n+1}} \qquad (2 < |z| < \infty).$$

Es decir,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - 2^{n-1}}{z^n} \qquad (2 < |z| < \infty). \quad [4]$$

EJERCICIOS

1. Probar que

$$\frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \cdots \qquad (0 < |z| < \infty).$$

2. Deducir la representación en serie de Laurent

$$z^3 \cosh\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{z}{2} + z^3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n + 2)!} \frac{1}{z^{2n-1}} \qquad (0 < |z| < \infty).$$

3. Hallar una representación para $1/(1 + z)$ en potencias negativas de z que sea válida cuando $1 < |z| < \infty$.

Sol. $$\frac{1}{1 + z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{z^n}.$$

4. Dar dos desarrollos en serie de potencias de z para la función

$$f(z) = \frac{1}{z^2(1 - z)},$$

y especificar en qué regiones son válidas.

Sol. $$\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \ (0 < |z| < 1); \quad -\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{z^n} \ (1 < |z| < \infty).$$

5. Representar la función $(z + 1)/(z - 1)$ por

a) su serie de Maclaurin, y describir la región de validez de tal representación;
b) su serie de Laurent en el dominio $1 < |z| < \infty$.

Sol. *a)* $$-1 - 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n (|z| < 1); \qquad b) \quad 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n}.$$

6. Probar que si $0 < |z - 1| < 2$,

$$\frac{z}{(z - 1)(z - 3)} = \frac{-1}{2(z - 1)} - 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - 1)^n}{2^{n+2}}.$$

7. Escribir las dos series de Laurent en potencias de z que representan a la función

$$f(z) = \frac{1}{z(1 + z^2)}$$

en ciertos dominios, y especificar esos dominios.

8. Hallar el desarrollo en serie de Laurent para la función $1/(z - a)$ para el dominio $|a| < |z| < \infty$, donde a es real y $-1 < a < 1$. A continuación, escribir $z = e^{i\theta}$ para obtener las fórmulas de suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\theta = \frac{a \cos \theta - a^2}{1 - 2a \cos \theta + a^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a^n \operatorname{sen} n\theta = \frac{a \operatorname{sen} \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2}.$$

(Comparar con el Ej. 5, Sec. 44.)

9. *a*) Sea z cualquier número complejo, y sea C el círculo unidad

$$w = e^{i\phi} \qquad (-\pi \leqq \phi \leqq \pi)$$

en el plano w. Usar entonces el contorno que aparece en [5], Sección 47, para los coeficientes de una serie de Laurent, adaptado a tales series en torno al origen del plano w, para demostrar que

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(w - \frac{1}{w}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\, w^n \qquad (0 < |w| < \infty),$$

donde

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[-i(n\phi - z \operatorname{sen} \phi)\right] d\phi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

b) Con la ayuda del Ejercicio 7, Sección 31, relativo a ciertas integrales definidas de funciones complejas pares e impares de una variable real, probar que los coeficientes de la parte *a*) se pueden escribir*

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \cos(n\phi - z \operatorname{sen} \phi)\, d\phi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

10. *a*) Sea f una función analítica en un dominio anular en torno del origen que contiene al círculo unidad $z = e^{i\phi}$ $(-\pi \leqq \phi \leqq \pi)$. Tomando ese círculo como camino de integración en las expresiones [2] y [3], Sección 47, para los coeficientes a_n y b_n en una serie de Laurent en potencias de z, probar que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi})\, d\phi + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\phi}) \left[\left(\frac{z}{e^{i\phi}}\right)^n + \left(\frac{e^{i\phi}}{z}\right)^n\right] d\phi$$

cuando z es cualquier punto del dominio anular.

* Estos coeficientes $J_n(z)$ se llaman funciones de Bessel de primera especie. Juegan un papel relevante en varias áreas de Matemática aplicada. Véase, por ejemplo, el libro del autor *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 4.ª ed., Cap. 8, 1987.

b) Haciendo $u(\theta) = \operatorname{Re}[f(e^{i\theta})]$, probar que del desarrollo de la parte *a*) se sigue que

$$u(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\phi)\, d\phi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} u(\phi) \cos[n(\theta - \phi)]\, d\phi.$$

Esta es una forma de escribir el desarrollo en *serie de Fourier* de la función real $u(\theta)$ en el intervalo $-\pi \leqq \theta \leqq \pi$. La restricción sobre $u(\theta)$ es más severa de lo necesario para que sea factible tal representación en serie de Fourier*.

49. CONVERGENCIA ABSOLUTA Y UNIFORME DE LAS SERIES DE POTENCIAS

El resto de este capítulo se dedica a diversas propiedades de las series de potencias, o sea, series del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

mencionadas al final de la Sección 44. Las presentaremos sólo en el caso especial $z_0 = 0$. Sus demostraciones en el caso general son esencialmente las mismas y muchos de nuestros resultados se generalizan simplemente sustituyendo z por $z - z_0$. Las generalizaciones que afectan a series con potencia negativas de $z - z_0$ son asimismo fáciles de obtener.

Recordemos de la Sección 44 que una serie de números complejos converge *absolutamente* si la serie de valores absolutos de esos números es convergente. El siguiente teorema se refiere a la convergencia absoluta de las series de potencias.

Teorema 1. *Si una serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad [1]$$

converge cuando $z = z_1$ $(z_1 \neq 0)$, *entonces es absolutamente convergente en todo punto* z *del disco abierto* $|z| < |z_1|$.

Para iniciar su demostración, suponemos que es convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n \qquad (z_1 \neq 0)$$

Por tanto, los términos $a_n z_1^n$ están acotados; es decir,

$$|a_n z_1^n| \leqq M \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

* Véanse otras condiciones en las Secciones 29 y 30 del libro citado en la nota al ejercicio anterior.

para alguna constante positiva M. Si $|z| < |z_1|$ y denotamos por ρ el módulo $|z/z_1|$, vemos que

$$|a_n z_n| = |a_n z_1^n| \left|\frac{z}{z_1}\right|^n \leqq M\rho^n,$$

donde $\rho < 1$. Ahora bien, la serie cuyos términos son los números reales $M\rho^n$ es una serie geométrica convergente siempre que $\rho < 1$. Luego, por el criterio de comparación de series reales, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|$$

converge para $|z| < |z_1|$; y el teorema queda probado.

El conjunto de puntos interiores a algún círculo en torno al origen es, por tanto, una región de convergencia para la serie de potencias [1]. El mayor círculo centrado en el origen tal que la serie converge en todos sus puntos interiores se llama el *círculo de convergencia* de la serie de potencias. *La serie no puede ser convergente en ningún punto z_2 exterior a ese círculo*, de acuerdo con el teorema precedente, pues si lo fuera, sería convergente dentro del círculo, centrado en el origen, que pasa por z_2; y, en consecuencia, el primer círculo no sería el círculo de convergencia.

Nuestro próximo teorema exige definir alguna teminología previa. Sea $|z| = R$ el círculo de convergencia de una serie de potencias centrada en el origen, y sean $S(z)$ y $S_N(z)$ la suma y la suma parcial, respectivamente, de esa serie:

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad S_N(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n \qquad (|z| < R).$$

Entonces escribimos la función resto

$$\rho_N(z) = S(z) - S_N(z) \qquad (|z| < R). \qquad [2]$$

Como la serie de potencias converge para todo z tal que $|z| < R$, sabemos que el resto $\rho_N(z)$ tiende a cero en tales z al tender N hacia infinito. Por la definición [1] de la Sección 44 del límite de una sucesión, eso significa que para cada número positivo ε existe un entero positivo N_ε tal que

$$|\rho_N(z)| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad N > N_\varepsilon. \qquad [3]$$

Cuando la elección de N_ε depende sólo del valor de ε y es independiente del punto z que se tome en una región prefijada, se dice que la convergencia es *uniforme* en esa región.

Teorema 2. *Si z_1 es un punto interior al círculo de convergencia $|z| = R$ de una serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad [4]$$

entonces esa serie es uniformemente convergente en el disco cerrado $|z| \leqq |z_1|$ (Fig. 51).

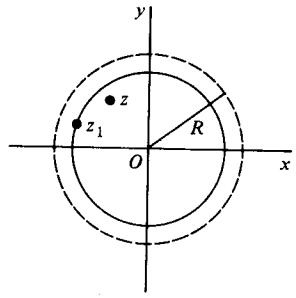


Figura 51

Para establecer esta convergencia uniforme, sean m y N cualesquiera dos enteros positivos, con $m > N$, y escribamos el resto [2] en la forma

$$\rho_N(z) = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=N}^{m} a_n z^n. \qquad [5]$$

Puesto que hay puntos con módulo mayor que $|z_1|$ para los que la serie [4] converge, sabemos por el Teorema 1 que la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z_1^n|$$

es convergente. El resto de esa serie, tras N términos, es el número real no negativo

$$\sigma_N = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=N}^{m} |a_n z_1^n|. \qquad [6]$$

Ahora bien, a la vista del Ejercicio 3, Sección 44,

$$|\rho_N(z)| = \lim_{m\to\infty} \left|\sum_{n=N}^{m} a_n z^n\right|;$$

y para $|z| \leqq |z_1|$,

$$\left|\sum_{n=N}^{m} a_n z^n\right| \leqq \sum_{n=N}^{m} |a_n||z|^n \leqq \sum_{n=N}^{m} |a_n||z_1|^n = \sum_{n=N}^{m} |a_n z_1^n|.$$

Por tanto,

$$|\rho_N(z)| \leqq \sigma_N \quad \text{cuando} \quad |z| \leqq |z_1|. \tag{7}$$

Como σ_N son los restos de una serie convergente, tienden a cero al tender N a infinito. Es decir, para cada ε positivo existe un entero N_ε tal que

$$\sigma_N < \varepsilon \quad \text{si} \quad N > N_\varepsilon. \tag{8}$$

Debido a las condiciones [7] y [8], la [3] es válida para todos los puntos del disco $|z| \leqq |z_1|$, y el valor de N_ε es independiente de la elección del z. Por tanto, la convergencia de la serie [4] es uniforme en ese disco.

Una consecuencia importante del Teorema 2 es el hecho de que *la serie de potencias* [4] *representa una función continua* $S(z)$ *en todo punto interior a su círculo de convergencia.* Esto es, si z_1 es un punto interior al círculo de convergencia $|z| = R$, para cada ε positivo existe un δ positivo tal que

$$|S(z) - S(z_1)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad |z - z_1| < \delta, \tag{9}$$

siendo δ suficientemente pequeño para que z esté en el dominio de definición $|z| < R$ de $S(z)$.

Para demostrar esto, denotemos por $S_N(z)$ la suma de los primeros N términos de la serie [4], y pongamos

$$S(z) = S_N(z) + \rho_N(z),$$

donde $\rho_N(z)$ es la función resto [2]. Entonces

$$|S(z) - S(z_1)| = |S_N(z) - S_N(z_1) + \rho_N(z) - \rho_N(z_1)|,$$

o sea

$$|S(z) - S(z_1)| \leqq |S_N(z) - S_N(z_1)| + |\rho_N(z)| + |\rho_N(z_1)|. \tag{10}$$

Para la convergencia uniforme anunciada en el Teorema 2, existe un entero positivo N_ε tal que

$$|\rho_N(z)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{siempre que} \quad N > N_\varepsilon \tag{11}$$

y donde z es cualquier punto que esté en algún disco cerrado centrado en el origen de radio mayor que $|z_1|$ pero menor que el radio R del círculo de convergencia. En particular, [11] se satisface para todo z en un entorno $|z - z_1| < \delta$ de z_1 que sea lo bastante pequeño como para estar contenido en ese disco cerrado.

Ahora bien, la suma parcial $S_N(z)$ es un polinomio y, por tanto, continua en z_1 para cada valor de N. En particular, cuando $N = N_\varepsilon + 1$ podemos escoger nuestro δ tan pequeño que

$$|S_N(z) - S_N(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{si} \quad |z - z_1| < \delta. \tag{12}$$

Haciendo $N = N_\varepsilon + 1$ en la desigualdad [10] y usando que [11] y [12] son verdaderas cuando $N = N_\varepsilon + 1$, encontramos que

$$|S(z) - S(z_1)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{para} \quad |z - z_1| < \delta.$$

Esta es la afirmación [9].

Sustituyendo $z - z_0$ o su recíproco en lugar de z, podemos extender los resultados de esta acción, con las modificaciones obvias, a series de los tipos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}.$$

Para ser más precisos, si la primera de estas series converge en un punto z_1, con $z_1 \neq z_0$, sabemos que converge absolutamente a una función continua en el disco abierto centrado en z_0 y de radio $|z_1 - z_0|$. Análogamente, si la segunda de estas series converge en z_1, entonces converge absolutamente a una función continua en la región *exterior* al círculo centrado en z_0 y que pasa por z_1.

Además, sabemos ahora que si una representación en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

es válida en un anillo $R_1 < |z - z_0| < R_2$, *ambas* series de la derecha convergen uniformemente en cualquier anillo cerrado concéntrico e interior a esa región de validez.

50. INTEGRACION Y DERIVACION DE SERIES DE POTENCIAS

Ya hemos visto que una serie de potencias

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

representa una función continua en todo punto interior a su círculo de convergencia. Probamos en esta sección que la suma $S(z)$ es analítica dentro del círculo. Nuestra demostración depende del siguiente teorema, de interés en sí mismo.

Teorema 1. *Sea C cualquier contorno interior al círculo de convergencia de la serie de potencias* [1], *y sea $g(z)$ cualquier función continua sobre C. La serie formada multiplicando cada término de la serie de potencias por $g(z)$ puede ser integrada término a término sobre C; esto es,*

$$\int_C g(z)S(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(z)z^n\,dz. \qquad [2]$$

Para demostrarlo, observemos que como $g(z)$ y la suma de la serie de potencias $S(z)$ son ambas continuas sobre C, la integral sobre C del producto

$$g(z)S(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n g(z)z^n + g(z)\rho_N(z),$$

existe, siendo $\rho_N(z)$ el resto de la serie tras N términos. Los términos de la suma finita aquí también son continuos sobre el contorno C, luego sus integrales sobre C existen. En consecuencia, la integral de $g(z)\rho_N(z)$

$$\int_C g(z)S(z)\,dz = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_C g(z)z^n\,dz + \int_C g(z)\rho_N(z)\,dz. \qquad [3]$$

Sea M el valor máximo de $g(z)$ sobre C, y sea L la longitud de C. En vista de la convergencia uniforme de la serie de potencias dada (Sec. 49), sabemos que para cada ε positivo existe un entero positivo N_ε tal que, para todo punto z sobre C,

$$|\rho_N(z)| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad N > N_\varepsilon.$$

Como N_ε es independiente de z, encontramos que

$$\left|\int_C g(z)\rho_N(z)\,dz\right| < M\varepsilon L \quad \text{siempre que} \quad N > N_\varepsilon;$$

esto es,

$$\lim_{N\to\infty} \int_C g(z)\rho_N(z)\,dz = 0.$$

De [3] se sigue que

$$\int_C g(z)S(z)\,dz = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_C g(z)z^n\,dz.$$

Esto es lo mismo que la Ecuación [2], con lo que queda probado el Teorema 1.

Si $g(z) = 1$ para cada valor de z en el disco abierto limitado por el círculo de convergencia de la serie de potencias [1], entonces

$$\int_C g(z)z^n\,dz = \int_C z^n\,dz = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

para todo contorno *cerrado* C contenido en ese dominio. Según [2], tenemos que

$$\int_C S(z)\,dz = 0$$

para todos los contornos de esa clase, y por el teorema de Morera (Sec. 41), la función $S(z)$ es analítica en ese dominio. Así pues, *la serie de potencias* [1] *representa a una función que es analítica en todo punto interior a su círculo de convergencia.* Este resultado es a menudo útil a la hora de establecer la analiticidad de funciones y al evaluar límite.

Ejemplo 1. Como ilustración, vamos a probar que la función definida por

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} z}{z} & \text{si} \quad z \neq 0, \\ 1 & \text{si} \quad z = 0 \end{cases}$$

es entera. Ya que el desarrollo en serie de Maclaurin

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

representa a sen z para todo valor de z, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \cdots, \qquad [4]$$

obtenida al dividir cada término de esa serie de Maclaurin por z, converge a $f(z)$ cuando $z \neq 0$. Pero la serie [4] converge claramente a $f(0)$ cuando $z = 0$. Por tanto, $f(z)$ viene representada por la serie de potencias [4] para todo z, y f es en consecuencia una función entera. Nótese que, puesto que f es continua en $z = 0$ y como $(\operatorname{sen} z)/z = f(z)$ cuando $z \neq 0$,

$$\lim_{z\to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = \lim_{z\to 0} f(z) = f(0) = 1. \qquad [5]$$

Este es un resultado conocido de antemano, ya que el límite en cuestión aquí es la definición de la derivada de sen z en $z = 0$.

Hacíamos notar al comienzo de la Sección 46 que la serie de Taylor de una función f en torno a un punto z_0 converge a $f(z)$ en cada punto z interior al círculo centrado en z_0 y que pasa por el punto z_1 más próximo en el que la función deja de ser analítica. A la vista de la afirmación en cursiva que precede al ejemplo anterior, modificada de modo que sea aplicable a series en potencias positivas de $z - z_0$, sabemos que *no hay ningún círculo mayor centrado en z_0 tal que en todos sus puntos interiores la serie de Taylor converja a $f(z)$*. Porque si existiera tal círculo, f sería analítica en z_1; y f no es analítica en z_1.

Presentamos ahora un resultado del tipo del Teorema 1 relativo a la derivación.

Teorema 2. *La serie de potencias* [1] *puede ser derivada término a término. Esto es, en todo punto z interior al círculo de convergencia de esa serie,*

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}. \qquad [6]$$

Para probarlo, sea z cualquier punto interior al círculo de convergencia, y sea C algún contorno cerrado simple, orientado positivamente, que rodee a z y sea interior a dicho círculo. Definamos además la función

$$g(s) = \frac{1}{2\pi i(s - z)^2} \qquad [7]$$

en todo punto s de C. Como la función

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

es analítica dentro de y sobre C, podemos poner

$$\int_C g(s)S(s)\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{S(s)\,ds}{(s - z)^2} = S'(z)$$

gracias a la representación integral de las derivadas en la Sección 40. Además,

$$\int_C g(s)s^n\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{s^n\,ds}{(s - z)^2} = \frac{d}{dz}\,z^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Así que cuando la variable de integración z en la Ecuación [2] se sustituye por la variable s y $g(s)$ es la función [7] a lo largo del contorno cerrado C, la Ecuación [2] se convierte en

$$S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dz}\,z^n,$$

que coincide con [6]. Esto termina la demostración.

El siguiente ejemplo sencillo ilustra cómo el Teorema 2, adaptado a series en potencias de $z - z_0$, se puede utilizar para hallar representaciones en series.

Ejemplo 2. En el Ejemplo 4 de la Sección 46 vimos que

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(z - 1)^n \qquad (|z - 1| < 1).$$

Derivando ambos miembros de esa ecuación se llega a que

$$\frac{-1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n(z - 1)^{n-1} \qquad (|z - 1| < 1),$$

o sea,

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(n + 1)(z - 1)^n \qquad (|z - 1| < 1). \qquad [8]$$

El desarrollo [8] es obviamente la serie de Taylor de la función $f(z) = 1/z^2$ centrada en el punto $z_0 = 1$.

51. UNICIDAD DE LAS REPRESENTACIONES POR SERIES

La unicidad de las representaciones por series de Taylor y Laurent, anticipada en las Secciones 46 y 48, respectivamente, se desprende fácilmente de los teoremas de la Sección 50. Consideramos en primer lugar la de las series de Taylor.

Teorema 1. *Si una serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \qquad [1]$$

converge a $f(z)$ en todo punto interior a algún círculo $z - z_0 = R$, entonces es la serie de Taylor de f en potencias de $z - z_0$.

Para demostrarlo, recordemos el Teorema 2 de la Sección 50 que

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$$

en todo punto interior al círculo de convergencia de la serie

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \qquad [2]$$

Por consiguiente, la serie de $S'(z)$ puede ella misma ser derivada término a término, es decir,

$$S''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2}$$

en todo punto z interior a ese círculo. De hecho, la derivada de $S(z)$ de cualquier orden se puede hallar derivando su representación en serie término a término. Evidentemente, pues,

$$S(0) = a_0, \quad S'(0) = 1!a_1, \quad S''(0) = 2!a_2, \quad \ldots, \quad S^{(n)}(0) = n!a_n, \ldots;$$

y los coeficientes a_n son los del desarrollo en serie de Maclaurin de $S(z)$:

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

La generalización a series de potencias de $z - z_0$ es inmediata, y el Teorema 1 queda probado.

Nótese que del Teorema 1 se deduce que si la serie [1] converge a cero en un entorno de z_0, los coeficientes a_n han de ser todos cero.

Nuestro segundo teorema se refiere a la unicidad de la representación en serie de Laurent.

Teorema 2. *Si una serie*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \qquad [3]$$

converge a $f(z)$ en todos los puntos de algún dominio anular centrado en z_0, entonces es la serie de Laurent para f en potencias de $z - z_0$ en ese dominio.

Lo demostraremos con ayuda del Teorema 1 de la Sección 50, adaptado a series en potencias positivas y negativas de $z - z_0$. Usando el índice de suma m en la serie dada, escribimos

$$\int_C g(z)f(z)\,dz = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_C g(z)(z - z_0)^m\,dz, \qquad [4]$$

donde $g(z)$ es cualquiera de las funciones

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i(z - z_0)^{n+1}} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

y C es un círculo del anillo dado, centrado en z_0 y orientado en sentido positivo. Como (véase Ej. 13, Sec. 33)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dz}{(z - z_0)^{n-m+1}} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ 1 & \text{si } m = n, \end{cases}$$

la Ecuación [4] se reduce a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}} = c_n,$$

que es una expresión de la Sección 47 para los coeficientes de la serie de Laurent para f en el anillo.

52. MULTIPLICACION Y DIVISION DE SERIES DE POTENCIAS

Supongamos que cada una de las series de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \qquad [1]$$

converge dentro de un círculo $|z| = R$. Las sumas $f(z)$ y $g(z)$ son funciones analíticas en el disco $|z| < R$ (Sec. 50), y el producto de esas sumas tiene un desarrollo en serie de Maclaurin válido allí:

$$f(z)g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \qquad (|z| < R). \qquad [2]$$

Como las series [1] son las series de Maclaurin de f y g, los tres primeros coeficientes del desarrollo [2] vienen dados por

$$c_0 = f(0)g(0) = a_0 b_0,$$

$$c_1 = \frac{f(0)g'(0) + f'(0)g(0)}{1!} = a_0 b_1 + a_1 b_0,$$

y

$$c_2 = \frac{f(0)g''(0) + 2f'(0)g'(0) + f''(0)g(0)}{2!} = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0.$$

La expresión general de c_n se obtiene fácilmente gracias a la fórmula (Ej. 15)

$$[f(z)g(z)]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(z)g^{(n-k)}(z), \qquad [3]$$

donde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

para la derivada n-ésima del producto de dos funciones. Como es habitual, $f^{(0)}(z) = f(z)$ y $0! = 1$. Evidentemente,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k};$$

y así se puede escribir [2] en la forma

$$f(z)g(z) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)z + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)z^2 + \cdots + \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)z^n + \cdots \qquad (|z| < R). \qquad [4]$$

La serie [4] es la misma que se obtiene multiplicando formalmente las dos series [1] término a término y reuniendo los términos resultantes por potencias de z; esto se conoce como el *producto de Cauchy* de las dos series dadas.

Ejemplo 1. La serie de Maclaurin para $e^z/(1 + z)$ es válida en el disco $|z| < 1$. Los tres primeros términos no nulos se hallan sin dificultad escribiendo

$$\frac{e^z}{1+z} = \left(1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \cdots\right)(1 - z + z^2 - z^3 + \cdots)$$

y multiplicando esas dos series término a término. El resultado buscado es

$$\frac{e^z}{1+z} = 1 + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 + \cdots \qquad (|z| < 1).$$

Supongamos ahora que $g(z) \neq 0$ cuando $|z| < R$. Como el cociente $f(z)/g(z)$ es analítico en ese disco, admite una representación en serie de Maclaurin

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \qquad (|z| < R), \qquad [5]$$

donde los coeficientes d_n se pueden calcular derivando $f(z)/g(z)$ sucesivamente y evaluando las derivadas en $z = 0$. Los resultados son los mismos que se obtienen realizando la división de la primera de las series [1] por la segunda. Puesto que en general sólo se necesitan en la práctica unos pocos primeros términos, este método no es difícil.

Ejemplo 2. Como se indicó en la Sección 25, los ceros de senh z son los números $z = n\pi i$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Luego la función

$$\frac{1}{z^2 \operatorname{senh} z} = \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{1 + z^2/3! + z^4/5! + \cdots}\right)$$

tiene una representación en serie de Laurent en el dominio $0 < |z| < \pi$. El denominador de esa fracción entre paréntesis es una serie de potencias que converge a (senh z)/z cuando $z \neq 0$ y a la unidad cuando $z = 0$. Luego la suma de esa serie no se anula nunca en el dominio $|z| < \pi$; y la serie de potencias de esa fracción se obtiene por división, resultando ser

$$\frac{1}{1 + z^2/3! + z^4/5! + \cdots} = 1 - \frac{1}{3!}z^2 + \left[\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right]z^4 + \cdots,$$

o sea

$$\frac{1}{1 + z^2/3! + z^4/5! + \cdots} = 1 - \frac{1}{6}z^2 + \frac{7}{360}z^4 + \cdots \qquad (|z| < \pi). \qquad [6]$$

De modo que

$$\frac{1}{z^2 \operatorname{senh} z} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6}\frac{1}{z} + \frac{7}{360}z + \cdots \qquad (0 < |z| < \pi). \qquad [7]$$

Aunque sólo hemos dado los tres primeros términos no nulos de esta serie de Laurent, puede hallarse, claro está, cualquier número de términos sin más que proseguir la división.

Para ilustrar una vía alternativa a la división directa, vamos a obtener [6] escribiendo

$$\frac{1}{1 + z^2/3! + z^4/5! + \cdots} = d_0 + d_1z + d_2z^2 + d_3z^3 + d_4z^4 + \cdots, \qquad [8]$$

donde los coeficientes en la serie de Maclaurin de la derecha han de ser calculados. Si ha de ser válida la Ecuación [8], entonces

$$1 = \left(1 + \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 + \cdots\right)(d_0 + d_1z + d_2z^2 + d_3z^3 + d_4z^4 + \cdots);$$

es decir,

$$(d_0 - 1) + d_1z + \left(d_2 + \frac{1}{3!}d_0\right)z^2 + \left(d_3 + \frac{1}{3!\,d_1}\right)z^3 + \left(d_4 + \frac{1}{3!}d_2 + \frac{1}{5!}d_0\right)z^4 + \cdots = 0$$

cuando $|z| < \pi$. Como todos los coeficientes de potencias de z en esta última serie de potencias tienen que ser cero, entonces $d_0 - 1 = 0$, $d_1 = 0$, etc. Tras calcular sucesivamente los valores de d_0, d_1, d_2, d_3, y d_4, vemos que, con esos valores, la [8] es lo mismo que [6].

EJERCICIOS

1. Derivando el desarrollo en serie de Maclaurin

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (|z| < 1),$$

obtener las representaciones

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n, \quad \frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)z^n \qquad (|z| < 1).$$

2. Hallar la serie de Taylor para la función

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2 + (z-2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 + (z-2)/2}\right]$$

centrada en el punto $z_0 = 2$. A continuación, derivando esa serie término a término, probar que

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(n+1)\left(\frac{z-2}{2}\right)^n \qquad (|z-2| < 2).$$

3. Sustituyendo $1/(z-1)$ en lugar de z en el desarrollo

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \qquad (|z| < 1),$$

hallar la representación en serie de Laurent para $1/z$ en el dominio no acotado $1 < |z-1| < \infty$. A continuación, derivando esa serie término a término, demostrar que

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(n-1)}{(z-1)^n} \qquad (1 < |z-1| < \infty).$$

(Comparar con el Ejemplo 2 de la Secc. 50.)

4. Argumentar cómo el desarrollo

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad (|z| < \infty)$$

puede deducirse derivando término a término la serie

$$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad (|z| < \infty)$$

5. Usando series, probar que si c es una constante compleja y

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{e^{cz} - 1}{z} & \text{si } z \neq 0, \\ c & \text{si } z = 0, \end{cases}$$

entonces f es entera.

6. Probar que si

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\cos z}{z^2 - (\pi/2)^2} & \text{para } z \neq \pm\pi/2, \\ -\dfrac{1}{\pi} & \text{para } z = \pm\pi/2, \end{cases}$$

entonces f es una función entera.

7. Integrar en el plano w la serie de Taylor (véase Ejemplo 4, Sec. 46)

$$\frac{1}{w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(w-1)^n \qquad (|w-1| < 1)$$

a lo largo de un contorno interior al círculo de convergencia desde $w = 1$ hasta $w = z$ para obtener la representación

$$\operatorname{Log} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n \qquad (|z-1| < 1).$$

8. Usar el resultado del Ejercicio 7 para probar que si

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{Log} z}{z-1} & \text{si } z \neq 1, \\ 1 & \text{si } z = 1, \end{cases}$$

entonces f es analítica en el dominio $0 < |z| < \infty$, $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$.

9. Probar que

$$\frac{e^z}{z(z^2+1)} = \frac{1}{z} + 1 - \frac{1}{2}z - \frac{5}{6}z^2 + \cdots \qquad (0 < |z| < 1).$$

10. Probar que

a) $\operatorname{cosec} z = \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{3!}z + \left[\dfrac{1}{(3!)^2} - \dfrac{1}{5!}\right]z^3 + \cdots \qquad (0 < |z| < \pi);$

b) $\dfrac{1}{e^z - 1} = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{12}z - \dfrac{1}{720}z^3 + \cdots \qquad (0 < |z| < 2\pi).$

11. Usar el desarrollo

$$\frac{1}{z^2 \operatorname{senh} z} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6}\frac{1}{z} + \frac{7}{360}z + \cdots \qquad (0 < |z| < \pi)$$

del Ejemplo 2, Sección 52, para demostrar que si C es el círculo $|z| = 1$, en sentido positivo, entonces (véase Ejemplo 1, Sec. 48)

$$\int_C \frac{dz}{z^2 \operatorname{senh} z} = -\frac{\pi i}{3}.$$

12. Sea f una función analítica en z_0 y tal que $f(z_0) = 0$. Usando series, demostrar que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{z - z_0} = f'(z_0).$$

Indicar cómo se deduce este resultado directamente de la definición de $f'(z_0)$.

13. Sean f y g analíticas en z_0, con $f(z_0) = g(z_0) = 0$, mientras que $g'(z_0) \neq 0$. Demostrar que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

14. Probar que si f es analítica en z_0 y $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m)}(z_0) = 0$, entonces la función definida como

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} & \text{si} \quad z \neq z_0, \\ \dfrac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} & \text{si} \quad z = z_0 \end{cases}$$

es analítica en z_0.

15. Verificar por inducción matemática la fórmula [3], Sección 52, para la n-ésima derivada del producto de dos funciones.

16. Sea f una función entera que viene representada por una serie de la forma

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \qquad (|z| < \infty).$$

a) Derivando la función compuesta $g(z) = f[f(z)]$ sucesivamente, hallar los tres primeros términos no nulos del desarrollo en serie de Maclaurin para $g(z)$ y demostrar así que

$$f[f(z)] = z + 2a_2 z^2 + 2(a_2^2 + a_3)z^3 + \cdots \qquad (|z| < \infty).$$

b) Obtener el resultado de la parte *a)* de manera *formal* escribiendo

$$f[f(z)] = f(z) + a_2[f(z)]^2 + a_3[f(z)]^3 + \cdots,$$

sustituyendo $f(z)$ en la derecha por su representación en serie, y reuniendo después los términos en potencias iguales que z.

c) Aplicando el resultado de la parte *a)* a la función $f(z) = \operatorname{sen} z$, probar que

$$\operatorname{sen}(\operatorname{sen} z) = z - \tfrac{1}{3}z^3 + \cdots \qquad (|z| < \infty).$$

17. Los *números de Euler* son los números E_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) en el desarrollo en serie de Maclaurin

$$\frac{1}{\cosh z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} z^n \qquad (|z| < \pi/2).$$

Explicar por qué esa representación es válida en el disco indicado y por qué $E_{2n+1} = 0$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$). Probar entonces que

$$E_0 = 1, \quad E_2 = -1, \quad E_4 = 5, \quad \text{y} \quad E_6 = -61.$$

CAPITULO

SEIS

RESIDUOS Y POLOS

El teorema de Cauchy-Goursat (Sec. 35) afirma que si una función es analítica en todo punto interior a un contorno cerrado simple C y en los puntos del propio C, el valor de la integral de la función a lo largo de ese contorno es cero. Sin embargo, si la función no es analítica en un número finito de puntos interiores a C, existe, como veremos en este capítulo, un número específico, llamado residuo, con que cada uno de esos puntos contribuye a la integral.

Desarrollamos aquí la teoría de los residuos e ilustramos su uso en ciertas áreas de Matemática aplicada. Comenzamos el capítulo con algunas cuestiones preliminares sobre singularidades de funciones.

53. RESIDUOS

Recordemos (Sec. 20) que un punto z_0 se llama un punto singular de la función f si f no es analítica en z_0 pero es analítica en algún punto de todo entorno de z_0. Un punto singular se dice que es *aislado* si, además, existe un entorno punteado $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ de z_0 en el que f es analítica.

Ejemplo 1. Como $1/z$ es analítica en todo punto excepto en $z = 0$, el origen es un punto singular aislado de esa función.

Ejemplo 2. La función

$$\frac{z + 1}{z^3(z^2 + 1)}$$

tiene los tres puntos singulares aislados $z = 0$ y $z = \pm i$.

Ejemplo 3. El origen es un punto singular de Log z, pero *no* es punto singular aislado, pues todo entorno punteado del origen contiene puntos del eje real negativo, en los que Log z no es analítica (véase Sec. 26).

Ejemplo 4. La función

$$\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi/2)}$$

tiene los puntos singulares $z = 0$ y $z = 1/n$ ($n = \pm 1, \pm 2, \ldots$), situados todos en el segmento del eje real entre $z = -1$ y $z = 1$. Cada punto singular, salvo $z = 0$, es aislado. El punto singular $z = 0$ no es aislado porque todo entorno punteado del origen contiene otros puntos singulares de la función.

Si z_0 es un punto singular aislado de una función f, existe un número positivo R_2 tal que $f(z)$ es analítica en todo z que cumpla $0 < |z - z_0| < R_2$. En consecuencia, la función viene representada por una serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \cdots \qquad [1]$$

$$(0 < |z - z_0| < R_2),$$

donde los coeficientes a_n y b_n tienen ciertas representaciones integrales (Sec. 47). En particular,

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{-n+1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

donde C es cualquier contorno cerrado simple positivamente orientado en torno a z_0 y contenido en el dominio $0 < |z - z_0| < R_2$. Cuando $n = 1$, esta expresión para b_n puede escribirse

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i b_1. \qquad [2]$$

El número complejo b_1, que es el coeficiente de $1/(z - z_0)$ en el desarrollo [1], se llama el *residuo* de f en el punto singular aislado z_0. A menudo usaremos la notación

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z),$$

o simplemente B cuando z_0 y f estén claramente indicados, para denotar el residuo b_1.

La Ecuación [2] proporciona un método útil para evaluar ciertas integrales sobre contornos cerrados simples.

Ejemplo 5. Consideremos la integral

$$\int_C \frac{e^{-z}}{(z - 1)^2}\,dz \qquad [3]$$

donde C es el círculo $|z| = 2$, positivamente orientado. El integrando, analítico en todo el plano salvo en el punto $z = 1$, tiene una representación en serie de Laurent válida en el dominio $0 < |z - 1| < \infty$. Luego, por [2], el valor de la integral [3] es $2\pi i$ veces el residuo del integrando en $z = 1$. Para calcular ese residuo, recordamos el desarrollo en serie de Maclaurin

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad (|z| < \infty) \qquad [4]$$

y usarlo para escribir

$$\frac{e^{-z}}{(z-1)^2} = \frac{e^{-1}e^{-(z-1)}}{(z-1)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!e} (z-1)^{n-2} \qquad (0 < |z-1| < \infty).$$

En esta serie de Laurent, que se puede escribir en la forma [1], el coeficiente de $1/(z - 1)$ es el número buscado $-1/e$. Por tanto,

$$\int_C \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}\, dz = -\frac{2\pi i}{e}. \qquad [5]$$

Ejemplo 6. Probemos que

$$\int_C \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) dz = 0, \qquad [6]$$

siendo C el mismo que en el Ejemplo 5. Como $1/z^2$ es analítica en todas partes salvo en el origen, también el integrando lo es. El punto singular aislado $z = 0$ es interior a C, y con ayuda de la serie de Maclaurin [4] podemos escribir el desarrollo en serie de Laurent

$$\exp\left(\frac{1}{z^2}\right) = 1 + \frac{1}{1!}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^4} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z^6} + \cdots \qquad (0 < |z| < \infty).$$

El residuo del integrando en su punto singular aislado $z = 0$ es, por tanto, cero ($b_1 = 0$); y eso demuestra [6].

Este ejemplo nos recuerda que aunque la analiticidad de una función dentro de y sobre un contorno cerrado simple C es condición suficiente para que el valor de la integral sobre C sea cero, no es condición necesaria.

54. EL TEOREMA DE LOS RESIDUOS

Si una función f tiene sólo un número finito de puntos singulares interiores a un contorno cerrado simple dado C, han de ser aislados. El próximo teorema es un enunciado preciso del hecho de que si además f es analítica sobre C, y C se

recorre en sentido positivo, el valor de la integral de f a lo largo de C es $2\pi i$ veces la *suma* de los residuos en esos puntos singulares.

Teorema. *Si C es un contorno cerrado simple positivamente orientado, dentro del cual y sobre el cual una función f es analítica a excepción de un número finito de puntos singulares z_k ($k = 1, 2, ..., n$) interior a C, entonces*

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z). \qquad [1]$$

Para demostrarlo, tomemos los puntos singulares z_k ($k = 1, 2, ..., n$) como centros de círculos C_k positivamente orientados, interiores a C y tan pequeños que cualesquiera dos de ellos sean disjuntos (Fig. 52). Los círculos C_k junto con el contorno cerrado simple C forman la frontera de una región cerrada sobre la que f es analítica, y cuyo interior es un dominio múltiplemente conexo. En consecuencia, de acuerdo con la extensión del teorema de Cauchy-Goursat para tales regiones (Teorema 2, Sec. 38).

$$\int_C f(z)\, dz - \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)\, dz = 0.$$

Esto se reduce a la Ecuación [1] porque (Sec. 53)

$$\int_{C_k} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z) \qquad (k = 1, 2, ..., n),$$

y la demostración está completa.

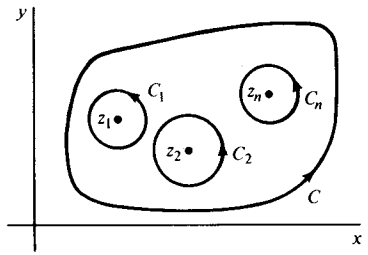


Figura 52

Ejemplo 1. Utilicemos el teorema para calcular la integral

$$\int_C \frac{5z - 2}{z(z-1)}\, dz \qquad [2]$$

cuando C es el círculo $|z| = 2$, positivamente orientado. El integrando tiene las

singularidades $z = 0$ y $z = 1$, ambas interiores a C. Podemos hallar los residuos B_1 en $z = 0$ y B_2 en $z = 1$ gracias a la serie de Maclaurin

$$\frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + \cdots \qquad (|z| < 1).$$

En primer lugar escribimos, para el dominio $0 < |z| < 1$. El desarrollo de Laurent

$$\frac{5z - 2}{z(z - 1)} = \left(\frac{5z - 2}{z}\right)\left(\frac{-1}{1 - z}\right) = \left(5 - \frac{2}{z}\right)(-1 - z - z^2 - \cdots) = \frac{2}{z} - 3 - 3z - \cdots$$

del integrando y concluimos que $B_1 = 2$. A continuación, observamos que cuando $0 < |z - 1| < 1$,

$$\frac{5z - 2}{z(z - 1)} = \left[\frac{5(z - 1) + 3}{z - 1}\right]\left[\frac{1}{1 + (z - 1)}\right] =$$

$$= \left(5 + \frac{3}{z - 1}\right)[1 - (z - 1) + (z - 1)^2 - \cdots].$$

El coeficiente de $1/(z - 1)$ en el desarrollo en serie de Laurent válido para $0 < |z - 1| < 1$ es, por tanto, 3. Así pues, $B_2 = 3$, y

$$\int_C \frac{5z - 2}{z(z - 1)}\,dz = 2\pi i(B_1 + B_2) = 10\pi i.$$

En este ejemplo, claro está, es más sencillo expresar el integrando como suma de sus fracciones parciales. Entonces

$$\int_C \frac{5z - 2}{z(z - 1)}\,dz = \int_C \frac{2}{z}\,dz + \int_C \frac{3}{z - 1}\,dz = 4\pi i + 6\pi i = 10\pi i.$$

(Véase también el Ejemplo 2, abajo.)

Si la función f en el enunciado del teorema de los residuos es, además, *analítica en todo punto del plano finito exterior a C*, resulta a veces más eficiente calcular la integral de f sobre C hallando un solo residuo de una cierta función relacionada. Concretamente, podemos sustituir [1] por la ecuación*

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right). \qquad [3]$$

* Este resultado aparece en la teoría de residuos en el infinito, que no trataremos aquí. Para ver los detalles de esa teoría, puede consultarse, por ejemplo, W. Kaplan, *Advanced Mathematics for Engineers*, pp. 637-639, 1981.

Para deducir la expresión [3] construimos un círculo $|z| = R$ lo bastante grande como para que el contorno C sea interior a él. Entonces, si C_0 denota un círculo positivamente orientado $|z| = R_0$, con $R_0 > R$, sabemos por el teorema de Laurent (Sec. 47) que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \qquad (R < |z| < \infty), \qquad [4]$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \qquad [5]$$

Puesto que la condición de validez de la representación [4] no es del tipo $0 < |z| < R_2$ (véase Sec. 53), el coeficiente c_{-1} *no* es el residuo de f en el punto $z = 0$, que puede incluso no ser punto singular de f. Pero si sustituimos z por $1/z$ en [4] y en su condición de validez, vemos que

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{z^{n+2}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_{n-2}}{z^n} \qquad (0 < |z| < 1/R)$$

y por tanto que

$$c_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right). \qquad [6]$$

Así pues, si escribimos $n = -1$ en la Ecuación [5] y usamos entonces [6] para sustituir c_{-1}, encontramos que

$$\int_{C_0} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right).$$

Finalmente, como f es analítica en la región cerrada acotada por C y C_0, el Corolario 2 de la Sección 38 produce el resultado deseado [3].

Ejemplo 2. En el Ejemplo 1, el integrando

$$f(z) = \frac{5z - 2}{z(z - 1)}$$

es analítico en todo z exterior al círculo C. Como

$$\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{5 - 2z}{z(1 - z)} = \left(\frac{5 - 2z}{z}\right)\left(\frac{1}{1 - z}\right) = \left(\frac{5}{z} - 2\right)(1 + z + z^2 + \cdots) =$$

$$= \frac{5}{z} + 3 + 3z + \cdots \qquad (0 < |z| < 1),$$

vemos que el residuo a utilizar en la Ecuación [3] es 5. Por tanto,

$$\int_C \frac{5z - 2}{z(z - 1)} dz = 2\pi i(5) = 10\pi i,$$

como ya demostramos en el Ejemplo 1.

55. PARTE PRINCIPAL DE UNA FUNCION

Hemos visto que si una función f tiene un punto singular aislado z_0, puede representarse por una serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n} + \cdots [1]$$

en un dominio $0 < |z - z_0| < R_2$, centrado en ese punto. La porción de la serie que contiene potencias negativas de $z - z_0$ se llama la *parte principal de* f en z_0. Ahora usaremos la parte principal para distinguir entre tres tipos de punto singular aislado. El comportamiento de f cerca de z_0 es fundamentalmente diferente en cada caso.

Si la parte principal de f en z_0 contiene al menos un término no nulo, pero el número de tales términos es finito, existe un entero positivo m tal que

$$b_m \neq 0 \quad \text{y} \quad b_{m+1} = b_{m+2} = \cdots = 0.$$

Esto es, el desarrollo [1] adopta la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} \quad [2]$$
$$(0 < |z - z_0| < R_2),$$

donde $b_m \neq 0$. En tal caso, el punto singular aislado z_0 se llama un *polo de orden* m. Un polo de orden $m = 1$ se llama un *polo simple*.

Ejemplo 1. Nótese que la función

$$\frac{z^2 - 2z + 3}{z - 2} = z + \frac{3}{z - 2} = 2 + (z - 2) + \frac{3}{z - 2} \qquad (0 < |z - 2| < \infty)$$

tiene un polo simple en $z = 2$, con residuo 3.

Ejemplo 2. La función

$$\frac{\operatorname{senh} z}{z^4} = \frac{1}{z^4}\left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \cdots\right) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{1}{5!}z + \frac{1}{7!}z^3 + \cdots$$
$$(0 < |z| < \infty)$$

tiene en $z = 0$ un polo de orden 3, con residuo 1/6.

Se puede probar (Ej. 10, Sec. 57) que $f(z)$ siempre tiende a infinito cuando z tiende a un polo.

Cuando la parte principal de f en z_0 tiene infinitos términos no nulos, ese punto se llama un *punto singular esencial.*

Ejemplo 3. La función

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} \qquad (0 < |z| < \infty)$$

tiene un punto singular esencial en $z = 0$. Su residuo en él es 1.

Un importante resultado relativo al comportamiento de una función cerca de un punto singular esencial se debe a Picard. Afirma que *en todo entorno de un punto singular esencial, una función alcanza todo valor finito, con una única posible excepción, un número infinito de veces.* No demostraremos el teorema de Picard, pero sí uno relacionado en el Capítulo 12 (Sec. 104)*.

Ejemplo 4. Como ilustración del teorema de Picard, probemos que la función $\exp(1/z)$ del Ejemplo 3 toma el valor -1 un número infinito de veces en cada entorno del origen. Para ello, recordemos de la Sección 23 que $\exp z = -1$ cuando $z = (2n + 1)\pi i$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Esto significa que $\exp(1/z) = -1$ en los puntos

$$z = \frac{1}{(2n + 1)\pi i} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

y hay un número infinito de esos puntos en cualquier entorno dado del origen. Como $\exp(1/z) \neq 0$ para todo z, cero es el valor excepcional que el teorema de Picard advierte que puede no ser alcanzado por la función.

Si todos los coeficientes b_n de la parte principal de f en un punto singular aislado z_0 son cero, el punto z_0 se llama un *punto singular evitable* de f. En tal caso, la serie de Laurent [1] contiene sólo potencias no negativas de $z - z_0$, y la serie es, de hecho, una serie de potencias. Nótese que el residuo en un punto singular evitable es siempre cero. Si definimos $f(z)$ en z_0 como a_0, la función pasa

* Una demostración del teorema de Picard puede verse en la Sección 51 del Volumen I del libro de Markushevich citado en el Apéndice 1.

a ser analítica en z_0 (véase Sec. 50). Así pues, una función f con un punto singular evitable puede hacerse analítica en ese punto sin más que asignarle un valor adecuado en él.

Ejemplo 5. Sea, por ejemplo, la función

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots - 1\right) =$$

$$= 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots \qquad (0 < |z| < \infty).$$

El punto $z = 0$ es un punto singular evitable. Si hacemos $f(0) = 1$ la función pasa a ser entera.

EJERCICIOS

1. En cada caso, escribir la parte principal de la función en su punto aislado y determinar si se trata de un polo, un punto singular esencial o un punto singular evitable.

a) $z \exp\left(\frac{1}{z}\right)$; *b)* $\frac{z^2}{1+z}$; *c)* $\frac{\operatorname{sen} z}{z}$; *d)* $\frac{\cos z}{z}$; *e)* $\frac{1}{(2-z)^3}$.

2. Probar que el punto singular de cada una de estas funciones es un polo. Determinar el orden del polo y calcular el correspondiente residuo B.

a) $\frac{1 - \cosh z}{z^3}$; *b)* $\frac{1 - \exp(2z)}{z^4}$; *c)* $\frac{\exp(2z)}{(z-1)^2}$.

Sol. a) $m = 1, B = -1/2$; *b)* $m = 3, B = -4/3$; *c)* $m = 2, B = 2e^2$.

3. Hallar el residuo en $z = 0$ de la función

a) $\frac{1}{z + z^2}$; *b)* $z \cos\left(\frac{1}{z}\right)$; *c)* $\frac{z - \operatorname{sen} z}{z}$; *d)* $\frac{\operatorname{cotg} z}{z^4}$; *e)* $\frac{\operatorname{senh} z}{z^4(1 - z^2)}$.

Sol. a) 1; *b)* $-1/2$; *c)* 0; *d)* $-1/45$; *e)* $7/6$.

4. Calcular, usando residuos, las integrales de las funciones siguientes sobre el círculo $z = 3$, positivamente orientado:

a) $\frac{\exp(-z)}{z^2}$; *b)* $z^2 \exp\left(\frac{1}{z}\right)$; *c)* $\frac{z+1}{z^2 - 2z}$.

Sol. a) $-2\pi i$; *b)* $\pi i/3$; *c)* $2\pi i$.

5. Sea f una función analítica en un punto z_0. Probar que

a) Si $f(z_0) = 0$, entonces z_0 es un punto singular evitable de la función

$$g(z) = \frac{f(z)}{z - z_0};$$

b) Si $f(z_0) \neq 0$, el punto z_0 es un polo simple de la función g de la parte *a)*, con residuo $f(z_0)$.

6. Usar [3], Sección 54, para calcular la integral de f a lo largo del círculo $|z| = 2$ positivamente orientado, cuando f es

a) $\frac{z^5}{1 - z^3}$; *b)* $\frac{1}{1 + z^2}$; *c)* $\frac{1}{z}$.

Sol. a) $-2\pi i$; *b)* 0; *c)* $2\pi i$.

7. Sean $P(z)$ y $Q(z)$ dos polinomios de grados respectivos n y m, con $m - n \geqq 2$. Usar la expresión [3], Sección 54, para probar que si todos los ceros de $Q(z)$ son interiores a un contorno cerrado simple C, entonces

$$\int_C \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0.$$

[Comparar con el Ej. 6*b*).]

8. Sea C el círculo $|z| = 1$, positivamente orientado. Seguir los pasos indicados para demostrar que

$$\int_C \exp\left(z + \frac{1}{z}\right) dz = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)!}.$$

a) Usando el desarrollo en serie de Maclaurin para e^z y el Teorema 1, Sección 50, que justifica la integración término a término, escribir la integral anterior como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_C z^n \exp\left(\frac{1}{z}\right) dz.$$

b) Gracias al teorema de los residuos de la Sección 54, evaluar las integrales que aparecen en la parte *a)* para conluir el resultado deseado.

56. RESIDUOS EN LOS POLOS

El método básico para hallar el residuo de una función en un punto singular aislado z_0 consiste en mirar el coeficiente de $1/(z - z_0)$ en la serie de Laurent. Si z_0 es un punto singular esencial no ofrecemos otro método. Pero en lo referente a polos, se dispone de algunas fórmulas útiles que ahora deduciremos.

Supongamos que una función $f(z)$ se puede escribir en la forma

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z - z_0}, \qquad [1]$$

donde $\phi(z)$ *es analítica en* z_0 *y* $\phi(z_0) \neq 0$. Del desarrollo en serie de Taylor

$$\phi(z) = \phi(z_0) + \frac{\phi'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{\phi''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \frac{\phi'''(z_0)}{3!}(z - z_0)^3 + \cdots \quad [2]$$

que es válido en un disco abierto $|z - z_0| < R_2$, se sigue que

$$f(z) = \frac{\phi(z_0)}{z - z_0} + \frac{\phi'(z_0)}{1!} + \frac{\phi'''(z_0)}{2!}(z - z_0) + \frac{\phi''''(z_0)}{3!}(z - z_0)^2 + \cdots$$

$$(0 < |z - z_0| < R_2).$$

Dado que ésta es la única representación en serie de Laurent para f en el dominio $0 < |z - z_0| < R_2$, y puesto que $\phi(z_0) \neq 0$, es claro que *f tiene un polo simple en z_0, con residuo*

$$b = \phi(z_0) \quad [3]$$

Ejemplo 1. La función $f(z) = (z + 1)/(z^2 + 9)$ tiene un punto singular aislado en $z = 3i$ y puede escribirse como

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z - 3i} \quad \text{donde} \quad \phi(z) = \frac{z + 1}{z + 3i}.$$

Como $\phi(z)$ es analítica en $z = 3i$ y $\phi(3 - i)/6 \neq 0$, ese punto es un polo simple de f; el residuo es $(3 - i)/6$. El punto $z = -3i$ es también un polo simple de f, con residuo $(3 + i)/6$.

La discusión anterior puede extenderse a funciones del tipo

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m} \qquad (m = 2, 3, \ldots), \quad [4]$$

donde $\phi(z)$ es analítica en z_0 y $\phi(z_0) \neq 0$. Porque la serie [2] permite escribir

$$f(z) = \frac{\phi(z_0)}{(z - z_0)^m} + \frac{\phi'(z_0)/1!}{(z - z_0)^{m-1}} + \frac{\phi''(z_0)/2!}{(z - z_0)^{m-2}} + \cdots + \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)/(m - 1)!}{z - z_0} +$$

$$+ \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\phi^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-m} \qquad (0 < |z - z_0| < R_2);$$

y esto demuestra que f tiene un polo de orden m en z_0, con residuo

$$b_1 = \frac{\phi^{(m-1)}(z_0)}{(m - 1)!}. \quad [5]$$

Ejemplo 2. Si $f(z) = (z^3 + 2z)/(z - i)^3$, entonces

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - i)^3} \quad \text{donde} \quad \phi(z) = z^3 + 2z.$$

La función $\phi(z)$ es entera, y $\phi(i) = i \neq 0$. Por tanto, f tiene en $z = i$ un polo de orden 3. El residuo es

$$b_i = \frac{\phi''(i)}{2!} = 3i.$$

Es fácil probar (Ej. 9, Sec. 57) que si una función f tiene un polo en un punto $z = z_0$, entonces $f(z)$ siempre se puede expresar en la forma [1] o [4]. A pesar de ello, la identificación de un punto singular aislado como polo de cierto orden suele lograrse más eficazmente recurriendo directamente a la serie de Laurent.

Ejemplo 3. Si se desea calcular, por ejemplo, el residuo de la función $f(z) = (\text{senh } z)/z^4$ en la singularidad $z = 0$, sería incorrecto escribir $f(z) = \phi(z)/z^4$, con $\phi(z) = \text{senh } z$, e intentar aplicar la fórmula [5] con $m = 4$. Porque es necesario que $\phi(z_0) \neq 0$ para poder aplicar [5]. La manera más sencilla de hallar el residuo en $z = 0$ consiste en escribir unos pocos términos de la serie de Laurent de f, como se hizo en el Ejemplo 2 de la Sección 55. Allí se vio que $z = 0$ es un polo de *tercer* orden y que el residuo es 1/6.

A veces el uso de la serie se puede combinar eficazmente con las fórmulas [3] o [5].

Ejemplo 4. Como $z(e^z - 1)$ es entera y sus ceros son $z = 2n\pi i$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, el punto $z = 0$ es claramente un punto singular aislado de la función

$$f(z) = \frac{1}{z(e^z - 1)}.$$

De la serie de Maclaurin

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \qquad (|z| < \infty),$$

vemos que

$$z(e^z - 1) = z\left(\frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) = z^2\left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots\right) \qquad (|z| < \infty).$$

Luego

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z^2} \quad \text{donde} \quad \phi(z) = \frac{1}{1 + z/2! + z^2/3 + \cdots}. \quad [6]$$

Puesto que ϕ es analítica en $z = 0$ y $\phi(0) = 1 \neq 0$, el punto $z = 0$ es un polo de *segndo* orden; y, según [5], el residuo es $b_1 = \phi'(0)$. Y como

$$\phi'(z) = \frac{-(1/2! + 2z/3! + \cdots)}{(1 + z/2! + z^2/3! + \cdots)^2}$$

en un entorno del origen, $b_1 = -1/2$.

El residuo puede asimismo calcularse dividiendo 1 por la serie de $z(e^z - 1)$, o bien multiplicando por $1/z$ la serie de Laurent de $1/(e^z - 1)$ del Ejercicio 10*b*), Sección 52.

57. CEROS Y POLOS DE ORDEN *m*

Si f es una función analítica en z_0, entonces es analítica en algún entorno $|z - z_0| < R_0$ de z_0; y sabemos por el teorema de Taylor (Sec. 45) que

$$f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \qquad (|z - z_0| < R_0), \qquad [1]$$

donde $a_0 = f(z_0)$ y $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ $(n = 1, 2, ...)$. Si, además, $f(z_0) = 0$ pero existe un entero positivo m tal que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$ y todas las derivadas de órdenes inferiores se anulan en z_0, se dice que f tiene en z_0 *un cero de orden m*. En ese caso, el desarrollo [1] se convierte en

$$f(z) = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n}(z - z_0)^n \qquad (|z - z_0| < R_0), \qquad [2]$$

donde $a_m \neq 0$. Como las series de potencias convergentes representan siempre funciones analíticas (Sec. 50), se deduce de [2] que

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \qquad [3]$$

donde g es analítica en z_0 y $g(z_0) \neq 0$.

Supongamos, por otra parte, que existe un entero positivo m tal que una función dada f se puede escribir en la forma [3], donde g es analítica y no nula en z_0. Entonces existe un entorno $|z - z_0| < R_0$ de z_0 en el que

$$f(z) = g(z_0)(z - z_0)^m + \frac{g'(z_0)}{1!}(z - z_0)^{m+1} + \frac{g''(z_0)}{2!}(z - z_0)^{m+2} + \cdots;$$

y, ya que ésta es la representación en serie de Taylor de f, se sigue que $g^{(m)}(z_0)/m! = g(z_0) \neq 0$ y que $f(z)$ y todas sus derivadas de orden menor que m se anulan en z_0. Esto demuestra que la Ecuación [3], con las condiciones impuestas sobre la función g, puede usarse como caracterización alternativa de los ceros de orden m.

Ceros y polos de orden m están estrechamente vinculados. En efecto, ahora podemos probar que *cuando dos funciones p y q son analíticas en un punto* z_0, *y* $p(z_0) \neq 0$, *el coeficiente* $p(z)/q(z)$ *tiene un polo de orden m en* z_0 *si y sólo si q tiene un cero de orden m allí.*

La verificación de esta afirmación es fácil y se basa en las dos observaciones siguientes relativas a dos nuevas funciones $\phi(z)$ y $g(z)$, con propiedades a determinar:

a) Si $\dfrac{p(z)}{q(z)} = \dfrac{\phi(z)}{(z - z_0)^m}$, entonces $q(z) = (z - z_0)^m \dfrac{p(z)}{\phi(z)}$;

b) Si $q(z) = (z - z_0)^m g(z)$, entonces $\dfrac{p(z)}{q(z)} = \dfrac{p(z)/g(z)}{(z - z_0)^m}$.

Primero, supongamos que $p(z)/q(z)$ tiene un polo de orden m en z_0, en cuyo caso tiene la forma indicada en *a*) (véase Ejerc. 9). Como $\phi(z)$ es analítica y no nula en z_0, lo mismo es cierto para el cociente $p(z)/\phi(z)$ en *a*); luego q tiene un cero de orden m en z_0. Recíprocamente, si partimos del hecho de que q tiene un cero de orden m en z_0, *b*) enseña que z_0 es un polo de orden m del cociente $p(z)/q(z)$.

Ejemplo 1. Sean las funciones enteras $p(z) \equiv 1$ y $q(z) = z(e^z - 1)$. Puesto que

$$q(0) = q'(0) = 0 \quad \text{y} \quad q''(0) = 2 \neq 0,$$

q tiene un cero de orden 2 en el punto $z = 0$. Por tanto, el cociente

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{1}{z(e^z - 1)}$$

tiene un polo de orden 2 en $z = 0$. (Comparar con el Ejemplo 4, Sec. 56.)

La discusión precedente sobre ceros y polos nos proporciona otro método útil para identificar polos simples y hallar los residuos correspondientes. En concreto, deducimos que *si dos funciones p y q son analíticas en un punto* z_0 *y*

$$p(z_0) \neq 0, \quad q(z_0) = 0, \quad \text{y} \quad q'(z_0) \neq 0,$$

entonces z_0 *es un polo simple del cociente* $p(z)/q(z)$, *y el residuo allí es*

$$b_1 = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}. \qquad [4]$$

Para probar esto, sean p y q como se ha dicho y observemos que, debido a las condiciones sobre q, z_0 es un cero de orden $m = 1$ de esa función. Ello significa que z_0 es un polo simple del cociente $p(z)/q(z)$; y como

$$q(z) = (z - z_0)g(z), \qquad [5]$$

con g analítica y no nula en z_0, ese cociente puede escribirse

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)/g(z)}{z - z_0}. \qquad [6]$$

Es evidente que el residuo de $p(z)/q(z)$ en z_0 es $b_1 = p(z_0)/g(z_0)$. Pero $g(z_0) = q'(z_0)$, como se ve derivando cada lado de la Ecuación [5] y haciendo $z = z_0$. Así se obtiene la expresión [4].

Ejemplo 2. Consideremos la función

$$f(z) = \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z},$$

que es cociente de las funciones enteras $p(z) = \cos z$ y $q(z) = \operatorname{sen} z$. Las singularidades de ese cociente ocurren en los ceros de q, o sea, en los puntos $z = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Como $p(n\pi) = (-1)^n \neq 0$, $q(n\pi) = 0$, y $q'(n\pi) = (-1)^n \neq 0$, cada punto singular es un polo simple, con residuo

$$b_1 = \frac{p(n\pi)}{q'(n\pi)} = 1.$$

Ejemplo 3. Hallemos el residuo de la función $f(z) = z/(z^4 + 4)$ en el punto singular aislado $z_0 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} = 1 + i$ poniendo $p(z) = z$ y $q(z) = z^4 + 4$. Como z_0 es un cero de q y $p(z_0) = z_0 \neq 0$, f tiene en z_0 un polo simple. El residuo es

$$b_1 = \frac{1}{4z_0^2} = \frac{1}{8i} = -\frac{i}{8}.$$

Aunque este residuo puede hallarse por el método de la Sección 56, el cálculo es algo más engorroso.

Existen fórmulas similares a [4] para residuos en polos de orden más alto, pero son más complicadas y, en general, poco prácticas.

EJERCICIOS

1. Demostrar en cada caso que los puntos singulares son polos. Determinar el orden de cada polo y el residuo correspondiente B.

a) $\dfrac{z^2 + 2}{z - 1}$; *b)* $\left(\dfrac{z}{2z + 1}\right)^3$; *c)* $\operatorname{tgh} z$; *d)* $\dfrac{\exp z}{z^2 + \pi^2}$; *e)* $\dfrac{z}{\cos z}$;

f) $\dfrac{z^{1/4}}{z + 1}$ ($|z| > 0$, $0 < \arg z < 2\pi$).

Sol. *a)* $m = 1$, $B = 3$; *b)* $m = 3$, $B = -3/16$; *c)* $m = 1$, $B = 1$; *f)* $m = 1$, $B = (1 + i)/\sqrt{2}$.

2. Probar que el punto $z = 0$ es un polo simple de la función $f(z) = \operatorname{cosec} z$ y que su residuo es 1,

a) apelando a la serie de Laurent para f expuesta en el Ejercicio 10*a*), Sección 52;
b) aplicando los resultados de la Sección 57.

3. Hallar el valor de la integral

$$\int_C \frac{3z^3 + 2}{(z - 1)(z^2 + 9)}\, dz,$$

en sentido positivo a lo largo del círculo *a)* $|z - 2| = 2$; *b)* $|z| = 4$.

Sol. *a)* πi; *b)* $6\pi i$.

4. Hallar el valor de la integral

$$\int_C \frac{dz}{z^3(z + 4)},$$

en sentido positivo a lo largo del círculo *a)* $|z| = 2$; *b)* $|z + 2| = 3$.

Sol. *a)* $\pi i/32$; *b)* 0.

5. Sea C el círculo $|z| = 2$, positivamente orientado. Calcular las integrales

a) $\displaystyle\int_C \operatorname{tg} z\, dz$; *b)* $\displaystyle\int_C \frac{dz}{\operatorname{senh} 2z}$; *c)* $\displaystyle\int_C \frac{\cosh \pi z\, dz}{z(z^2 + 1)}$.

Sol. *a)* $-4\pi i$; *b)* $-\pi i$; *c)* $4\pi i$.

6. Usar [3], Sección 54, referida a un solo residuo, para calcular la integral de $f(z)$ a lo largo del círculo $|z| = 3$ positivamente orientado, cuando $f(z)$ es

a) $\dfrac{(3z + 2)^2}{z(z - 1)(2z + 5)}$; *b)* $\dfrac{z^3(1 - 3z)}{(1 + z)(1 + 2z^4)}$; *c)* $\dfrac{z^3 e^{1/z}}{1 + z^3}$.

Sol. *a)* $9\pi i$; *b)* $-3\pi i$; *c)* $2\pi i$.

7. Probar que si C es el círculo $|z| = 8$, positivamente orientado, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{zt}}{\operatorname{senh} z}\, dz = 1 - 2 \cos \pi t + 2 \cos 2\pi t.$$

8. Sea f una función analítica que tiene un cero en z_0 pero no es idénticamente nula en ningún entorno de z_0. Explicar por qué z_0 debe ser un cero de algún orden positivo m de f. A continuación, usando la caracterización [3], Sección 57, de un tal cero, demostrar que $f(z) \neq 0$ sobre un entorno punteado $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ de z_0. Probar así que los ceros de una función analítica no idénticamente nula son *aislados*.

Sugerencia: Recordar de la Sección 14 que una función es no nula sobre algún entorno de todo punto en el que sea continua y no nula.

9. Supongamos que $f(z)$ tiene un polo de orden m en $z = z_0$, de modo que admite un desarrollo en serie de Laurent del tipo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots + \frac{b_m}{(z - z_0)^m} \qquad (0 < |z - z_0| < R_2),$$

con $b_m \neq 0$ (Sec. 55). Sea $\phi(z)$ una función definida en el disco abierto $|z - z_0| < R_2$ por medio de las ecuaciones $\phi(z) = (z - z_0)^m f(z)$ $(0 < |z - z_0| < R_2)$ y $\phi(z_0) = b_m$. Demostrar que $\phi(z)$ admite representación en serie de potencias de $z - z_0$ y por tanto es analítica en z_0. Probar así que *si una función f tiene un polo de orden m en un punto z_0, entonces se puede escribir en la forma*

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^m},$$

donde $\phi(z)$ es analítica en z_0 y $\phi(z_0) \neq 0$. (El recíproco de esta afirmación se vio en la Sec. 56.)

10. Sea f una función con un polo de orden m en el punto $z = z_0$. Con ayuda de la expresión obtenida en el Ejercicio 9, probar que $1/f(z)$ tiende a cero al tender z hacia z_0, y por tanto que (Sec. 13)

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty.$$

11. Probar que

$$\int_C \frac{dz}{(z^2 - 1)^2 + 3} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}},$$

donde C es el contorno, positivamente orientado, del rectángulo cuyos lados están sobre las rectas $x = \pm 2$, $y = 0$, e $y = 1$.

Sugerencia: Observando que los cuatro ceros del polinomio $q(z) = (z^2 - 1)^2 + 3$ son las raíces cuadradas de los números $1 \pm \sqrt{3}i$, probar que $1/q(z)$ es una función analítica dentro de y sobre C excepto en los puntos $z_0 = (\sqrt{3} + i)/\sqrt{2}$ y $-\bar{z}_0 = = (-\sqrt{3} + i)/\sqrt{2}$. Aplicar entonces el método de la Sección 57 para identificar polos simples y hallar el residuo correspondiente.

12. Sea

$$f(z) = \frac{1}{[q(z)]^2},$$

siendo la función q analítica en z_0, $q(z_0) = 0$, y $q'(z_0) \neq 0$. Probar que z_0 es un polo de orden 2 de la función f, con residuo

$$b_1 = -\frac{q''(z_0)}{[q'(z_0)]^3}.$$

Sugerencia: Nótese que z_0 es un cero de orden $m = 1$ de la función q, de manera que la Ecuación [5], Sección 57, es válida. Entonces escribimos

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^2} \quad \text{donde} \quad \phi(z) = \frac{1}{[g(z)]^2}.$$

La forma deseada del residuo $b_1 = \phi'(z_0)$ se puede obtener probando que $q'(z_0) = = g(z_0)$ y $q''(z_0) = 2g'(z_0)$.

13. Aplicar el resultado del Ejercicio 12 para hallar el residuo en $z = 0$ de la función

a) $\operatorname{cosec}^2 z$; *b)* $\dfrac{1}{(z + z^2)^2}$.

Sol. a) 0; *b)* -2.

14. Sea C_N el contorno, positivamente orientado, del cuadrado cuyos lados están sobre las rectas

$$x = \pm(N + 1/2)\pi \quad \text{e} \quad y = \pm(n + 1/2)\pi,$$

donde N es un entero positivo. Demostrar que

$$\int_{C_N} \frac{dz}{z^2 \operatorname{sen} z} = 2\pi i\left[\frac{1}{6} + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2\pi^2}\right].$$

Entonces, utilizando el hecho de que el valor de esta integral tiende a cero cuando N tiende a infinito (Ej. 16, Sec. 33), argumentar cómo se deduce que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

58. CALCULO DE INTEGRALES REALES IMPROPIAS

Una importante aplicación de la teoría de residuos es la evaluación de ciertos tipos de integrales definidas e impropias que aparecen en el análisis *real*. Los ejemplos tratados aquí y en las próximas tres secciones ilustran la aplicación de la teoría.

En análisis real, la integral impropia de una función continua $f(x)$ sobre el intervalo semi-infinito $x \geqq 0$ se define como

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R \to \infty} \int_0^R f(x)\,dx \qquad [1]$$

Cuando existe el límite de la derecha, se dice que la integral impropia converge; y su valor es el valor de dicho límite.

Si $f(x)$ es continua para todo x, la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \qquad [2]$$

se define como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R_1\to\infty} \int_{-R_1}^{0} f(x)\,dx + \lim_{R_2\to\infty} \int_{0}^{R_2} f(x)\,dx. \qquad [3]$$

Cuando existen ambos límites individuales, la integral [2] converge, siendo su valor la suma de los de esos dos límites. Otro valor asignado a la integral [2] resulta útil asimismo. Se trata del *valor principal de Cauchy* (P.V.) de la integral [2], que es el número

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx, \qquad [4]$$

supuesto que ese límite exista.

Si la integral [3] converge, el valor obtenido es el mismo que el valor principal de Cauchy. Por otra parte, si $f(x) = x$, por ejemplo, el valor principal de Cauchy de [2] es 0, mientras que la integral no converge según la definición [3]. Pero supongamos que f es una función *par*; es decir, $f(-x) = f(x)$ para todo x real. Entonces, si el valor principal de Cauchy de la integral [2] existe, la integral [2] converge. Nótese además que cuando f es par y algunas de las integrales [1] o [2] converge, también converge la otra. De hecho,

$$\int_{0}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx. \qquad [5]$$

Supongamos ahora que el integrando en la integral [2] se puede escribir

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

con p y q polinomios reales sin factores comunes, y donde $q(x)$ no tiene ceros reales. Cuando la integral converge, su valor puede calcularse con frecuencia fácilmente determinando su valor principal de Cauchy con ayuda de los residuos.

Ejemplo. Probemos que la integral

$$\int_{0}^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4}\,dx \qquad [6]$$

converge, y hallemos su valor. Nótese que la integral de la derecha representa la integral de la función

$$f(z) = \frac{2z^2 - 1}{z^4 + 5z^2 + 4} = \frac{2z^2 - 1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}$$

sobre el eje real en el plano complejo. Esta función tiene singularidades aisladas en los puntos $z = \pm i$, $z = \pm 2i$ y es analítica en el resto del plano.

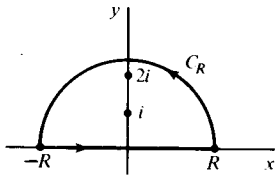


Figura 53

Cuando $R > 2$, los puntos singulares de f en el semiplano superior están en el interior de la región semicircular acotada por el segmento $z = x\,(-R \leqq x \leqq R)$ del eje real y la mitad superior del círculo $|z| = R$ desde $z = R$ hasta $z = -R$ (Fig. 53). Integrando f en sentido positivo a lo largo del contorno de esa región semicircular, vemos que

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i(B_1 + B_2), \qquad [7]$$

donde B_1 es el residuo de f en el punto $z = i$ y B_2 es el residuo en $z = 2i$. De acuerdo con la Sección 56, basta hacer

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z - i} \quad \text{donde} \quad \phi(z) = \frac{2z^2 - 1}{(z + i)(z^2 + 4)}$$

para ver que el punto $z = i$ es un polo simple, y $B_1 = \phi = -1/(2i)$. El punto $z = 2i$ es también polo simple, con $B_2 = 3/(4i)$. Por tanto, $2\pi i(B_1 + B_2) = \pi/2$, y la Ecuación [7] se puede poner en la forma

$$\int_{-R}^{R} f(x)\,dx = \frac{\pi}{2} - \int_{C_R} f(z)\,dz, \qquad [8]$$

válida para todo valor de R mayor que 2.

Ahora probaremos que el valor de la integral de la derecha en la Ecuación [8] tiende a cero cuando R tiende a infinito. Para ello, observemos que cuando $|z| = R$,

$$|2z^2 - 1| \leqq 2|z|^2 + 1 = 2R^2 + 1$$

y

$$|z^4 + 5z^2 + 4| = |z^2 + 1||z^2 + 4| \geqq ||z|^2 - 1|\,|z|^2 - 4| = (R^2 - 1)(R^2 - 4).$$

Así que si z es cualquier punto de C_R,

$$|f(z)| \leqq M_R \quad \text{donde} \quad M_R = \frac{2R^2 + 1}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)};$$

y eso significa que

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leqq M_R \pi R, \qquad [9]$$

siendo πR la longitud del semicírculo C_R. Como el número

$$M_R \pi R = \frac{\pi R(2R^2 + 1)}{(R^2 - 1)(R^2 - 4)}$$

es un cociente de polinomios en R, con grado menor en el numerador que en el denominador, ese cociente tiende a cero cuando R tiende a infinito. Más precisamente, si dividimos tanto el numerador como el denominador por R^4 y escribimos

$$M_R \pi R = \frac{\pi\left(\dfrac{2}{R} + \dfrac{1}{R^3}\right)}{\left(1 - \dfrac{1}{R^2}\right)\left(1 - \dfrac{4}{R^2}\right)},$$

es evidente que $M_R \pi R$ tiende a cero. En consecuencia, a la vista de la desigualdad [9],

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z)\,dz = 0.$$

Se sigue, por tanto, de la Ecuación [8] que

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

o sea

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Como el integrando aquí es par, sabemos por los comentarios al inicio de esta sección que la integral converge a su valor principal de Cauchy, y de acuerdo con la Ecuación [6],

$$\int_0^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^4 + 5x^2 + 4}\,dx = \frac{\pi}{4}. \qquad [10]$$

59. INTEGRALES IMPROPIAS EN LAS QUE APARECEN SENOS Y COSENOS

La teoría de residuos resulta útil a la hora de calcular integrales impropias convergentes del tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{sen} ax\,dx \quad \text{o} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ax\,dx, \qquad [1]$$

donde a denota una constante positiva. Al igual que en la Sección 58, supongamos que $f(x) = p(x)/q(x)$, donde p y q son polinomios reales sin factores comunes. Además, q no tiene ceros reales. El método descrito en la Sección 58 no es aplicable directamente ahora, pues sen z y cos z crecen como senh y o e^{ay}, al tender y hacia infinito (Sec. 24). La modificación ilustrada más bajo viene sugerida por el hecho de que

$$\int_{-R}^{R} f(x) \cos ax\,dx + i \int_{-R}^{R} f(x) \operatorname{sen} ax\,dx = \int_{-R}^{R} f(x) e^{iax}\,dx,$$

junto con la observación de que el módulo e^{-ay} de e^{iaz} es acotado en el semiplano superior $y \geqq 0$.

Ejemplo 1. Vamos a demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2 + 1)^2}\,dx = \frac{2\pi}{e^3}. \qquad [2]$$

Puesto que el integrando es par, basta probar que el valor principal de Cauchy de la integral existe, y hallar su valor.

Introduzcamos la función

$$f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2} \qquad [3]$$

y hagamos notar que el producto $f(z)e^{i3z}$ es analítico en todos los puntos del eje real y en el semiplano superior, excepción hecha del punto $z = i$. La singularidad $z = i$ está en el interior de la región semicircular cuyo contorno consiste en el

segmento $-R \leqq x \leqq R$ del eje real y la mitad superior C_R del círculo $|z| = R (R > 1)$ desde $z = R$ hasta $z = -R$. Integrando $f(z)e^{i3z}$ a lo largo de ese contorno se obtiene

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{i3x}}{(x^2 + 1)^2}\, dx = 2\pi i B_1 - \int_{C_R} f(z)e^{i3z}\, dz, \qquad [4]$$

donde

$$B_1 = \operatorname*{Res}_{z=i} [f(z)e^{i3z}].$$

Como

$$f(z)e^{i3z} = \frac{\phi(z)}{(z - i)^2} \quad \text{donde} \quad \phi(z) = \frac{e^{i3z}}{(z + i)^2},$$

el punto $z = i$ es obviamente un polo del orden 2 de $f(z)e^{i3z}$, y

$$B_1 = \phi'(i) = \frac{1}{ie^3}.$$

Igualando las partes reales de cada lado de la Ecuación [4], encontramos que

$$\int_{-R}^{R} \frac{\cos 3x}{(x^2 + 1)^2}\, dx = \frac{2\pi}{e^3} - \operatorname{Re} \int_{C_R} f(z)e^{i3z}\, dz. \qquad [5]$$

Finalmente, observemos que cuando z es un punto de C_R,

$$|f(z)| \leqq M_R \quad \text{donde} \quad M_R = \frac{1}{(R^2 - 1)^2}$$

y que $|e^{i3z}| = e^{-3y} \leqq 1$ para ese punto. En consecuencia,

$$\left| \operatorname{Re} \int_{C_R} f(z)e^{i3z}\, dz \right| \leqq \left| \int_{C_R} f(z)e^{i3z}\, dz \right| \leqq M_R \pi R. \qquad [6]$$

Como la cantidad

$$M_R \pi R = \frac{\pi R}{(R^2 - 1)^2}$$

tiende a cero cuando R tiende a infinito, y a causa de las desigualdades [6], basta hacer tender R hacia infinito en la Ecuación [5] para llegar al deseado resultado [2].

Al calcular integrales del tipo [1], es a veces necesario utilizar un resultado basado en la *desigualdad de Jordan*:

$$\int_0^{\pi} e^{-R \operatorname{sen} \theta}\, d\theta < \frac{\pi}{R} \qquad (R > 0). \qquad [7]$$

Para verificar esta desigualdad, notemos en primer lugar de las gráficas de las funciones $y = \operatorname{sen} \theta$ e $y = 2\theta/\pi$ cuando $0 \leqq \theta \leqq \pi/2$ (Fig. 54) que $\operatorname{sen} \theta \geqq 2\theta/\pi$ para todo valor de θ en ese intervalo. Por consiguiente, si $R > 0$,

$$e^{-R \operatorname{sen} \theta} \leqq e^{-2R\theta/\pi} \quad \text{cuando} \quad 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2};$$

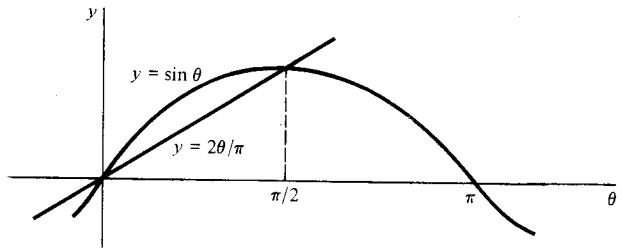


Figura 54

luego

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R \operatorname{sen} \theta}\, d\theta \leqq \int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi}\, d\theta = \frac{\pi}{2R}(1 - e^{-R}).$$

Por tanto

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R \operatorname{sen} \theta}\, d\theta < \frac{\pi}{2R} \qquad (R > 0) \qquad [8]$$

Ahora bien, esto no es sino otra forma de la desigualdad [7], pues la gráfica de $y = \operatorname{sen} \theta$ es simétrica con respecto a la recta vertical $\theta = \pi/2$ sobre el intervalo $0 \leqq \theta \leqq \pi$.

Supongamos ahora que todas las singularidades de una función racional $f(z) = p(z)/q(z)$ que están en el semiplano superior $y \geqq 0$ se encuentran por debajo de un semicírculo $z = Re^{i\theta}$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$, denotado por C_R. La desigualdad de Jordan nos permite probar que *si para todos los puntos de C_R existe una constante positiva M_R tal que $|f(z)| \leqq M_R$, donde M_R tiende a cero cuando R tiende a infinito, entonces*

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z)e^{iaz}\, dz = 0 \qquad (a > 0). \qquad [9]$$

Nuestra verificación del límite [9] comienza por el hecho de que

$$\int_{C_R} f(z)e^{iaz}\,dz = \int_0^{\pi} f(\mathrm{Re}^{i\theta})\exp(iaRe^{i\theta})iRe^{i\theta}\,d\theta.$$

Como

$$|f(Re^{i\theta})| \leqq M_R \quad \text{y} \quad |\exp(iaRe^{i\theta})| \leqq e^{-aR\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

y por la desigualdad de Jordan concluimos que

$$\left|\int_{C_R} f(z)e^{iaz}\,dz\right| \leqq M_R R\int_0^{\pi} e^{-aR\,\mathrm{sen}\,\theta}\,d\theta < \frac{M_R\pi}{a}.$$

El límite [9] es entonces evidente, porque $M_R \to 0$ para $R \to \infty$.

Ejemplo 2. Hallemos el valor principal de Cauchy de la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}\,x\,dx}{x^2 + 2x + 2}.$$

Como en el Ejemplo 1, la existencia del valor en cuestión será establecida calculándolo.

Pongamos

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 2z + 2} = \frac{z}{(z - z_1)(z - \bar{z}_1)},$$

donde $z_1 = -1 + i$. El punto z_1, que está por encima del eje x, es un polo simple de la función $f(z)e^{iz}$, con residuo

$$B_1 = \frac{z_1 e^{iz_1}}{z_1 - \bar{z}_1}. \qquad [10]$$

Por tanto, cuando $R > \sqrt{2}$ y C_R denota la mitad superior del círculo positivamente orientado $|z| = R$,

$$\int_{-R}^{R} \frac{xe^{ix}\,dx}{x^2 + 2x + 2} = 2\pi iB_1 - \int_{C_R} f(z)e^{iz}\,dz;$$

y esto quiere decir que

$$\int_{-R}^{R} \frac{x\,\mathrm{sen}\,x\,dx}{x^2 + 2x + 2} = \mathrm{Im}\,(2\pi iB_1) - \mathrm{Im}\int_{C_R} f(z)e^{iz}\,dz. \qquad [11]$$

Ahora bien,

$$\left|\mathrm{Im}\int_{C_R} f(z)e^{iz}\,dz\right| \leqq \left|\int_{C_R} f(z)e^{iz}\,dz\right|; \qquad [12]$$

y notamos que, cuando z es un punto de C_R,

$$|f(z)| \leqq M_R \quad \text{donde} \quad M_R = \frac{R}{(R - \sqrt{2})^2}$$

y que $|e^{iz}| = e^{-y} \leqq 1$ para tal punto. Procediendo como en el Ejemplo 1, *no podemos* concluir que el miembro de la derecha en la desigualdad [12], y por ende el de la izquierda, tiende a cero al tender R a infinito. Porque la cantidad

$$M_R\pi R = \frac{\pi R^2}{(R - \sqrt{2})^2}$$

no tiende a cero. El límite [9], no obstante, proporciona el resultado deseado.

En efecto, se desprende de [12] que el miembro izquierdo tiende a cero cuando R tiende a infinito. En consecuencia, la Ecuación [11], junto con la expresión [10] del residuo B_1, nos dice que

$$\text{P.V.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{sen}\,x\,dx}{x^2 + 2x + 2} = \mathrm{Im}\,(2\pi iB_1) = \frac{\pi}{e}(\mathrm{sen}\,1 + \cos 1). \qquad [13]$$

EJERCICIOS

Probar las fórmulas de integración de los Ejercicios 1 a 9, con ayuda de los residuos.

1. *a)* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi}{2}$; *b)* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{4}$.

2. *a)* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{\pi}{6}$; *b)* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)^2} = \frac{\pi}{200}$.

3. *a)* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; *b)* $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x^2\,dx}{x^6 + 1} = \frac{\pi}{6}$.

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x\,dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} = \frac{\pi}{a^2 - b^2}\left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a}\right)$ $(a > b > 0)$.

5. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + 1}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-a}$ $(a \geqq 0)$.

6. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2 + b^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4b^3}(1 + ab)e^{-ab}$ $(a > 0, b > 0)$.

7. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} 2x}{x^2 + 3}\,dx = \frac{\pi}{2}\exp(-2\sqrt{3}).$

8. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x \operatorname{sen} ax}{x^4 + 4}\,dx = \frac{\pi}{2}\,e^{-a}\operatorname{sen} a \qquad (a > 0).$

9. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^3 \operatorname{sen} ax}{x^4 + 4}\,dx = \pi e^{-a}\cos a \qquad (a > 0).$

Usar los métodos de las Secciones 58 y 59 para establecer la convergencia de las integrales de los Ejercicios 10 a 12 y hallar sus valores.

10. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2 + 1)^2}.$

11. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x \operatorname{sen} x\,dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}.$

12. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^3 \operatorname{sen} x\,dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}.$

Mediante los métodos de las Secciones 58 y 59, demostrar que los valores principales de Cauchy de las integrales de los Ejercicios 13 a 17 existen, y calcularlos a continuación.

13. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}.$

14. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\,dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 2x + 2)}.$

Sol. $-\pi/5.$

15. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{x^2 + 4x + 5}.$

Sol. $-(\pi/e)\operatorname{sen} 2.$

16. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{(x + 1)\cos x}{x^2 + 4x + 5}\,dx.$

Sol. $\dfrac{\pi}{e}(\operatorname{sen} 2 - \cos 2).$

17. $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos x\,dx}{(x + a)^2 + b^2} \qquad (b > 0).$

18. Usando residuos y el contorno que indica la Figura 55, probar la fórmula de integración

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

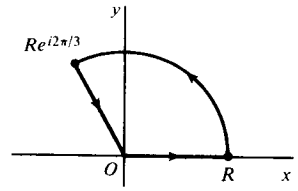


Figura 55

19. La fórmula de integración

$$\int_0^\infty \frac{dx}{[(x^2 - a)^2 + 1]^2} = \frac{\pi}{8\sqrt{2}A^3}\left[(2a^2 + 3)\sqrt{A + a} + a\sqrt{A - a}\right],$$

donde a es cualquier número real y $A = \sqrt{a^2 + 1}$ aparece en la teoría de cementación de acero por calor infrarrojo*. Deducirla siguiendo los pasos que a continuación se indican.

a) Argumentar por qué los cuatro ceros del polinomio

$$q(z) = (z^2 - a)^2 + 1$$

son las raíces cuadradas de los números $a \pm i$. Entonces, utilizando el hecho de que los números

$$z_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{A + a} + i\sqrt{A - a})$$

y $-z_0$ son las raíces cuadradas de $a + i$ (Ej. 12, Sec. 7), comprobar que $\pm\bar{z}_0$ son las raíces cuadradas de $a - i$ y que, por tanto, z_0 y $-\bar{z}_0$ son los únicos ceros de $q(z)$ en el semiplano superior Im $z \geqq 0$.

b) Por el método desarrollado en el Ejercicio 12, Sección 57, y habida cuenta de que $z_0^2 = a + i$ con objeto de simplificar, probar que el punto z_0 en la parte *a*) es un polo de orden 2 de la función $f(z) = 1/[q(z)]^2$ y que el residuo B_1 en z_0 es

$$B_1 = -\frac{q''(z_0)}{[q'(z_0)]^3} = \frac{a - i(2a^2 + 3)}{16A^2 z_0}.$$

Tras observar que $q'(-\bar{z}) = -\overline{q'(z)}$ y $q''(-\bar{z}) = \overline{q''(z)}$, usar el mismo método para probar que el punto $-\bar{z}_0$ en la parte *a*) es también un polo de orden 2 de f, con residuo

$$B_2 = \overline{\left\{\frac{q''(z_0)}{[q'(z_0)]^3}\right\}} = -\bar{B}_1.$$

* Véase pp. 359-364 del libro de Brown, Hoyler y Bierwith citado en el Apéndice 1.

Obtener así la expresión

$$B_1 + B_2 = \frac{1}{8A^2 i} \operatorname{Im}\left[\frac{-a + i(2a^2 + 3)}{z_0}\right]$$

para la suma de esos residuos.

c) Con referencia a la parte *a*), demostrar que $|q(z)| \geqq (R - |z_0|)^4$ si $|z| = R$, donde $R > |z_0|$. Entonces, gracias al resultado final de *b*), completar la demostración de la fórmula de integración propuesta.

60. INTEGRALES DEFINIDAS EN LAS QUE APARECEN SENOS Y COSENOS

El método de los residuos es asimismo útil al calcular ciertas integrales definidas del tipo

$$\int_0^{2\pi} F(\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\, d\theta. \qquad [1]$$

El hecho de que θ varíe desde 0 hasta 2π sugiere considerar θ como argumento de un punto z sobre el disco unidad C centrado en el origen; luego escribiremos $z = e^{i\theta}$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$. Cuando hacemos esta sustitución usando las ecuaciones

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos\theta = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad d\theta = \frac{dz}{iz}, \qquad [2]$$

la integral [1] se convierte en la integral de contorno

$$\int_C F\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right)\frac{dz}{iz} \qquad [3]$$

de una función de z a lo largo del círculo C positivamente orientado. La integral original [1] es, claro está, simplemente una forma paramétrica de la integral [3], de acuerdo con la expresión [2], Sección 32. Cuando el integrando de [3] es una función racional de z, podemos calcular esa integral por medio del teorema de los residuos una vez localizados los ceros del denominador, y en el supuesto de que ninguno de ellos esté en C.

Ejemplo. Demostremos que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\operatorname{sen}\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}} \qquad (-1 < a < 1). \qquad [4]$$

Esta fórmula de integración es válida claramente si $a = 0$, y excluiremos ese caso de nuestra discusión. Bajo las sustituciones [2], la integral adopta la forma

$$\int_C \frac{2/a}{z^2 + (2i/a)z - 1}\, dz, \qquad [5]$$

donde C es el círculo $|z| = 1$, positivamente orientado. El denominador del integrando tiene los ceros imaginarios puros

$$z_1 = \left(\frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}\right)i, \quad z_2 = \left(\frac{-1 - \sqrt{1 - a^2}}{a}\right)i.$$

De modo que si $f(z)$ denota el integrando, entonces

$$f(z) = \frac{2/a}{(z - z_1)(z - z_2)}.$$

Nótese que, al ser $|a| < 1$,

$$|z_2| = \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{|a|} > 1.$$

Además, como $|z_1 z_2| = 1$, se deduce que $|z_1| < 1$. Por lo que no existen puntos singulares sobre C, y el único interior a él es el punto z_1. El correspondiente residuo B_1 se halla haciendo

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{z - z_1} \quad \text{donde} \quad \phi(z) = \frac{2/a}{z - z_2}.$$

Esto demuestra que z_1 es un polo simple y que

$$B_1 = \phi(z_1) = \frac{2/a}{z_1 - z_2} = \frac{1}{i\sqrt{1 - a^2}}.$$

Así pues,

$$\int_C \frac{2/a}{z^2 + (2i/a)z - 1}\, dz = 2\pi i B_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}};$$

y la fórmula [4] queda probada.

El método que acabamos de ilustrar es asimismo aplicable cuando los argumentos del seno y del coseno son múltiplos enteros de θ. Se puede escribir, por ejemplo, $\cos 2\theta = (z^2 + z^{-2})/2$ cuando $z = e^{i\theta}$.

61. INTEGRACION A LO LARGO DE UN CORTE DE RAMIFICACION

El teorema de los residuos se utiliza con frecuencia para calcular integrales reales en las que la función $f(z)$ del integrando tiene un corte de ramificación.

Ejemplo. Sea x^{-a}, donde $x > 0$ y $0 < a < 1$, el valor principal de la potencia indicada de x; esto es, x^{-a} es el número real positivo $\exp(-a \ln x)$. Calcularemos ahora la integral real impropia

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+1}\,dx \qquad (0 < a < 1), \qquad [1]$$

que es importante en el estudio de la *función gamma**. La integral [4] es impropia no sólo por su límite superior de integración, sino también porque su integrando tiene una discontinuidad infinita en $x = 0$. La integral converge cuando $0 < a < 1$, porque el integrando se comporta como x^{-a} cerca de $x = 0$ y como x^{-a-1} cuando x tiende a infinito. No necesitamos, sin embargo, probar la convergencia por separado, ya que tal cosa quedará incluida en nuestro cálculo de la integral.

Empezamos denotando por C_ρ y C_R los círculos $|z| = \rho$ y $|z| = R$, respectivamente, con $\rho < 1 < R$, y les asignamos la orientación indicada en la Figura 56. Como la rama

$$f(z) = \frac{z^{-a}}{z+1} \qquad (|z| > 0,\ 0 < \arg z < 2\pi) \qquad [2]$$

de la función multivaluada $z^{-a}/(z+1)$, con el corte en $\arg z = 0$, es continua a trozos sobre C_ρ y C_R, las integrales

$$\int_{C_\rho} f(z)\,dz, \quad \int_{C_R} f(z)\,dz \qquad [3]$$

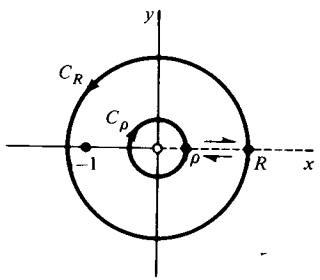


Figura 56

* Veáse, por ejemplo, la p. 4 del libro de Lebedev citado en el Apéndice 1.

existen. Nuestra técnica para calcular la integral [1] se basa en una expresión para la suma de esas dos integrales de contorno.

Con el fin de obtenerla, consideremos el contorno cerrado de la Figura 56, descrito por un punto que se mueve desde ρ hasta R a lo largo del corte de $f(z)$, después sobre C_R de regreso a R, entonces a lo largo del corte hasta ρ, y finalmente sobre C_ρ de vuelta a ρ. Si escribimos

$$f(z) = \frac{\exp(-a \log z)}{z+1} = \frac{\exp[-a(\ln r + i\theta)]}{re^{i\theta}+1} \qquad (z = re^{i\theta})$$

y usamos $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi$ a lo largo de los «bordes» superior e inferior, respectivamente, sobre el corte del anillo, vemos que

$$f(z) = \frac{\exp[-a(\ln r + i0)]}{r+1} = \frac{r^{-a}}{r+1} \qquad (z = re^{i0})$$

en el borde superior y

$$f(z) = \frac{\exp[-a(\ln r + i2\pi)]}{r+1} = \frac{r^{-a}e^{-i2a\pi}}{r+1} \qquad (z = re^{i2\pi})$$

sobre el borde inferior. El teorema de los residuos sugiere que

$$\int_\rho^R \frac{r^{-a}}{r+1}\,dr + \int_{C_R} f(z)\,dz - \int_\rho^R \frac{r^{-a}e^{-i2a\pi}}{r+1}\,dr + \int_{C_\rho} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1} f(z). \qquad [4]$$

Nuestra deducción de la Ecuación [4] es sólo *formal*, desde luego, ya que f no es analítica, ni siquiera está definida, sobre el corte. Es válida, no obstante, y se puede justificar por un argumento análogo al del Ejercicio 19.

El residuo en la Ecuación [4] se puede calcular observando que la función

$$\phi(z) = z^{-a} = \exp[-a \log z] \qquad (|z| > 0,\ 0 < \arg z < 2\pi)$$

es analítica en $z = -1$ y que

$$\phi(-1) = \exp[-a(\ln + i\pi)] = e^{-ia\pi}.$$

Esto enseña que el punto $z = -1$ es un polo simple de la función f, definida por [2], y que

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = e^{-ia\pi}.$$

La Ecuación [4] puede, por tanto, escribirse como la ansiada expresión para la suma de las integrales [3]:

$$\int_{C_\rho} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz = 2\pi i e^{-ia\pi} + (e^{-i2a\pi} - 1)\int_\rho^R \frac{r^{-a}}{r+1}\,dr. \qquad [5]$$

Por la definición [2] de la función f, vemos que

$$\left|\int_{C_\rho} f(z)\,dz\right| \leqq \frac{\rho^{-a}}{1-\rho}\,2\pi\rho = \frac{2\pi}{1-\rho}\,\rho^{1-a}$$

y

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \leqq \frac{R^{-a}}{R-1}\,2\pi R = \frac{2\pi R}{R-1}\,\frac{1}{R^a}.$$

Como $0 < a < 1$, los valores de esas dos integrales tienden a 0 cuando ρ y R tienden a 0 e infinito, respectivamente. Reformulando la Ecuación [5] como una expresión para la última integral allí y haciendo tender entonces ρ hacia cero, encontramos que

$$\int_0^R \frac{r^{-a}}{r+1}\,dr = \frac{1}{e^{-i2a\pi} - 1}\left[\int_{C_R} f(z)\,dz - 2\pi i e^{-ia\pi}\right].$$

Haciendo tender R a infinito en esta última ecuación llegamos al resultado

$$\int_0^\infty \frac{r^{-a}}{r+1}\,dr = 2\pi i\,\frac{e^{-ia\pi}}{1 - e^{-i2a\pi}},$$

que es lo mismo que

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{x+1}\,dx = \frac{\pi}{\operatorname{sen} a\pi} \qquad (0 < a < 1). \qquad [6]$$

EJERCICIOS

Usando residuos, establecer las fórmulas de integración de los Ejercicios 1 a 7.

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4\operatorname{sen}\theta} = \frac{2\pi}{3}.$

2. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{2}\pi.$

3. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta\,d\theta}{5 - 4\cos 2\theta} = \frac{3\pi}{8}.$

4. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} \qquad (-1 < a < 1).$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta\,d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} + \frac{a^2\pi}{1-a^2} \qquad (-1 < a < 1).$

6. $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos\theta)^2} = \frac{a\pi}{(\sqrt{a^2-1})^3} \qquad (a > 1).$

7. $\displaystyle\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{2n}\theta\,d\theta = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\,\pi \qquad (n = 1, 2, \ldots).$

Utilizando contornos cerrados similares al de la Figura 56, deducir formalmente las fórmulas de integración de los Ejercicios 8 a 10.

8. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+1)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$

9. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+a)(x+b)}\,dx = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right)\frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{a-b} \qquad (a > 0,\ b > 0,\ a \neq b).$

10. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^a}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{(1-a)\pi}{4\cos(a\pi/2)} \qquad (-1 < a < 3)$, donde $x^a = \exp(a \ln x)$.

11. *a*) Considerando la integral de $\exp(iz^2)$ a lo largo del contorno, positivamente orientado, del sector $0 \leqq r \leqq R$, $0 \leqq \theta \leqq \pi/4$, probar que

$$\int_0^R e^{ix^2}\,dx = e^{i\pi/4}\int_0^R e^{-r^2}\,dr - \int_{C_R} e^{iz^2}\,dz,$$

donde C_R es el arco $z = Re^{i\theta}$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi/4)$.

b) Probar que el valor de la integral sobre el arco C_R de la parte *a*) tiende a cero cuando R tiende a infinito, obteniendo la desigualdad

$$\left|\int_{C_R} e^{iz^2}\,dz\right| \leqq \frac{R}{2}\int_0^{\pi/2} e^{-R^2\operatorname{sen}\phi}\,d\phi$$

y consultando la forma [8], Sección 59, de la desigualdad de Jordan.

c) Usar los resultados *a*) y *b*), junto con la conocida fórmula de integración*

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

---

* La forma usual de calcular esta integral consiste en escribir su cuadrado como

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

y evaluar entonces la integral iterada cambiando a coordenadas polares. Véanse los detalles, por ejemplo, en A. E. Taylor y W. R. Mann, *Advanced Calculus*, 3.ª ed., pp. 680-681, 1983.

para calcular las *integrales de Fresnel*

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\,dx = \int_0^\infty \operatorname{sen}(x^2)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}},$$

importantes en la teoría de la difracción.

12. Sea el punto $z = x_0$ sobre el eje x un polo simple de una función f, y sea B_0 el residuo de f en ese polo. Explicar cómo se deduce que existe un número positivo ρ_0 tal que

$$f(z) = \frac{B_0}{z - x_0} + g(z) \qquad (0 < |z - x_0| \leqq \rho_0),$$

con g continua en el disco cerrado $|z - x_0| \leqq \rho_0$. Sea C_ρ la mitad superior del círculo $|z - x_0| = \rho$, con $\rho < \rho_0$, y donde la orientación es positiva (Fig. 57). Probar que

$$\lim_{\rho \to 0} \int_{C_\rho} f(z)\,dz = -B_0 \pi i.$$

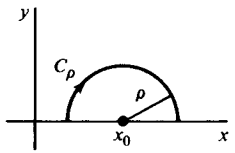


Figura 57

13. *a*) Integrando la función $f(z) = e^{iz}/z$ sobre el contorno cerrado simple de la Figura 58, demostrar que

$$2i \int_\rho^R \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = -\int_{C_\rho} f(z)\,dz - \int_{C_R} f(z)\,dz,$$

donde C_ρ y C_R son los arcos que se indican en esa figura.

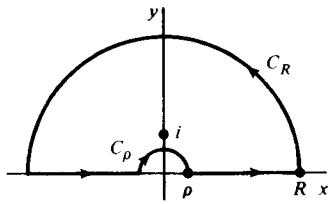


Figura 58

b) Usar el Ejercicio 12 y la desigualdad de Jordan [7], Sección 59, para hallar los límites de los valores de las integrales sobre los arcos C_ρ y C_R, respectivamente, de la parte *a*). Deducir así la fórmula de integración

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2},$$

que es de interés en la teoría de las *integrales de Fourier**.

14. Deducir la fórmula de integración

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Sugerencia: Nótese que $2 \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{Re}(1 - e^{i2x})$, e integrar la función $f(z) = (1 - e^{i2z})/z^2$ sobre el contorno cerrado que muestra la Figura 58. Consultar además el Ejercicio 12.

15. Demostrar que

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 + 1}\,dx = 0$; *b*) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2 + 1)^2}\,dx = -\frac{\pi}{4}$.

Sugerencia: Usando la rama

$$\log z = \ln r + i\theta \qquad \left(r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\right)$$

de la función logarítmica, integrar la función

$$\frac{\log z}{z^2 + 1} \quad \text{y} \quad \frac{\log z}{(z^2 + 1)^2}$$

sobre el contorno cerrado de la Figura 58. Asimismo, utilizar las fórmulas de integración del Ejercicio 1, Sección 59.

16. La integral de la función

$$f(x) = \frac{1}{x(x^2 - 4x + 5)}$$

sobre un intervalo que incluya al origen no existe. Probar que existe el *valor principal* de la integral de esa función sobre todo el eje x,

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\rho \to 0} \left[\int_{-\infty}^{-\rho} f(x)\,dx + \int_{\rho}^{\infty} f(x)\,dx \right] \qquad (\rho > 0),$$

calculando ese valor con ayuda del contorno de la Figura 58 y del resultado del Ejercicio 12.

Sol. $2\pi/5$.

* Véase el libro del autor *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 4.ª ed., pp. 181-183, 1987.

17. Dado que (véase nota al pie del Ejercicio 11)

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

deducir la fórmula de integración

$$\int_0^\infty \exp(-x^2)\cos(2bx)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-b^2) \qquad (b > 0)$$

integrando la función $\exp(-z^2)$ sobre el camino rectangular señalado en la Figura 59 y haciendo tender a hacia infinito.

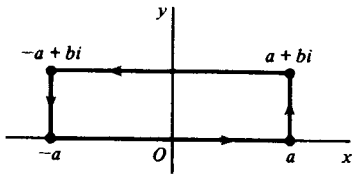


Figura 59

18. La *función beta* es la siguiente función de dos variables reales:

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt \qquad (p > 0,\ q > 0).$$

Hacer la sustitución $t = 1/(x+1)$, y usar el resultado obtenido en la Sección 61 para probar que

$$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi} \qquad (0 < p < 1).$$

19. Consideremos los dos contornos cerrados simples de la Figura 60, obtenidos al dividir en dos fragmentos el anillo limitado por los círculos C_ρ y C_R en la Figura 56 (Sec. 61). Las partes L y $-L$ de esos contornos son segmentos rectos orientados sobre cualquier rayo $\arg z = \theta_0$, donde $\pi < \theta_0 < 3\pi/2$. Además, Γ_ρ y γ_ρ son las porciones indicadas de C_ρ, mientras que Γ_R y γ_R forman C_R.

a) Explicar cómo se sigue del teorema de los residuos que cuando la rama

$$f_1(z) = \frac{z^{-a}}{z+1} \qquad \left(|z| > 0,\ -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}\right)$$

de la función multivaluada $z^{-a}/(z+1)$ se integra sobre el contorno cerrado de la izquierda en la Figura 60,

$$\int_\rho^R \frac{r^{-a}}{r+1}\,dr + \int_{\Gamma_R} f_1(z)\,dz + \int_L f_1(z)\,dz + \int_{\Gamma_\rho} f_1(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1} f_1(z).$$

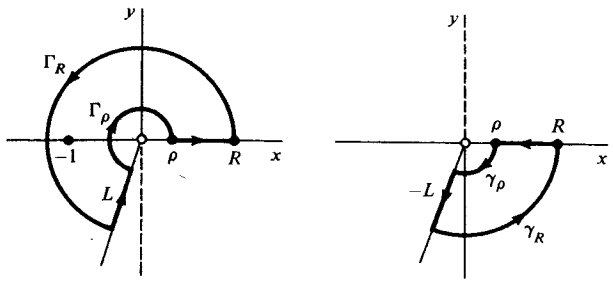


Figura 60

b) Aplicar el teorema de Cauchy-Goursat a la rama

$$f_2(z) = \frac{z^{-a}}{z+1} \qquad \left(|z| > 0,\ \frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{5\pi}{2}\right)$$

de $z^{-a}/(z+1)$, integrada sobre el contorno cerrado de la derecha en la Figura 60, para ver que

$$-\int_\rho^R \frac{r^{-a}e^{-i2a\pi}}{r+1}\,dr + \int_{\gamma_\rho} f_2(z)\,dz - \int_L f_2(z)\,dz + \int_{\gamma_R} f_2(z)\,dz = 0.$$

c) Argumentar por qué en las tres últimas integrales de las partes *a*) y *b*) las ramas $f_1(z)$ y $f_2(z)$ de $z^{-a}/(z+1)$ pueden sustituirse por la rama

$$f(z) = \frac{z^{-a}}{z+1} \qquad (|z| > 0,\ 0 < \arg z < 2\pi).$$

Entonces, sumando miembros correspondientes de esas dos ecuaciones, deducir la Ecuación [4], Sección 61, que fue obtenida allí de manera formal tan sólo.

62. TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE

Sea F una función de la variable compleja s que es analítica sobre el plano finito s salvo en un número finito de polos. Denotemos por L_R un segmento de recta vertical $s = \gamma + it\ (-R \leqq t \leqq R)$, donde la constante γ es positiva y lo bastante grande como para que el segmento esté a la derecha de todos los polos. Definimos una nueva función f de la variable real t, para valores positivos de t, por la ecuación

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{L_R} e^{st}F(s)\,ds \qquad (t > 0), \qquad [1]$$

supuesto que el límite existe. La expresión [1] se suele escribir

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\,\text{P.V.}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st}F(s)\,ds \qquad (t > 0) \qquad [2]$$

[comparar con la Ec. [4], Sec. 58], y tal integral se llama una *integral de Bromwich.*

Puede demostrarse que, bajo condiciones muy generales sobre las funciones involucradas, $f(t)$ es la transformada inversa de Laplace de $F(s)$. Esto es, si $F(s)$ es la *transformada de Laplace de* $f(t)$, definida por la ecuación

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt, \qquad [3]$$

entonces $f(t)$ se recupera por medio de la Ecuación [1], donde la elección del número positivo γ es irrelevante, en tanto en cuanto L_R esté a la derecha de los polos de F^*. Las transformadas de Laplace y sus inversas son importantes en la resolución de ecuaciones diferenciales, ya sean éstas ordinarias o en derivadas parciales.

Los residuos se utilizan con frecuencia para calcular el límite en la expresión [1], una vez especificada la función $F(s)$. Usando la variable z en vez de s, sean z_1, z_2, ..., z_n los polos de $F(z)$. Denotemos entonces por R_0 el mayor de sus módulos, y consideremos un semicírculo C_R con representación paramétrica

$$z = \gamma + Re^{i\theta} \qquad \left(\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{3\pi}{2}\right), \qquad [4]$$

donde $R > R_0 + \gamma$. Nótese que para cada polo z_k,

$$|z_k - \gamma| \leqq |z_k| + \gamma \leqq R_0 + \gamma < R.$$

Por tanto, todos los polos están en el interior de la región semicircular limitada por C_R y L_R (Fig. 61), y el teorema de los residuos nos dice que

$$\int_{L_R} e^{zt} F(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} [e^{zt} F(z)] - \int_{C_R} e^{zt} F(z)\, dz. \qquad [5]$$

Supongamos ahora que, *para todos los puntos z de* C_R, *existe una constante positiva* M_R *tal que* $|F(z)| \leqq M_R$, *donde* M_R *tiende a cero cuando R tiende a infinito.* Podemos usar la representación paramétrica [4] de C_R para escribir

$$\int_{C_R} e^{zt} F(z)\, dz = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \exp(\gamma t + Rte^{i\theta}) F(\gamma + Re^{i\theta}) Rie^{i\theta}\, d\theta.$$

Entonces, como

$$|\exp(\gamma t + Rte^{i\theta})| = e^{\gamma t} e^{Rr\cos\theta} \quad \text{y} \quad |F(\gamma + Re^{i\theta})| \leqq M_R,$$

* Para un tratamiento extenso de los detalles relativos a las transformadas de Laplace, véase *Operational Mathematics*, de R. V. Churchill, 3.ª ed., 1972, donde se discuten asimismo transformadas $F(s)$ con infinitos puntos singulares aislados o con cortes de ramificación.

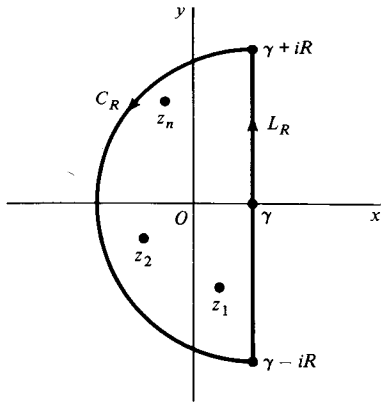


Figura 61

hallamos que

$$\left|\int_{C_R} e^{zt} F(z)\, dz\right| \leqq e^{\gamma t} M_R R \int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{Rt\cos\theta}\, d\theta. \qquad [6]$$

Ahora bien, la sustitución $\phi = \theta - (\pi/2)$, junto con la desigualdad de Jordan [7], Sección 59, revelan que

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{Rt\cos\theta}\, d\theta = \int_0^\pi e^{-Rt\,\mathrm{sen}\,\phi}\, d\phi < \frac{\pi}{Rt}.$$

Así que la desigualdad [6] se convierte en

$$\left|\int_{C_R} e^{zt} F(z)\, dz\right| < \frac{e^{\gamma t} M_R \pi}{t}, \qquad [7]$$

y esto demuestra que el valor de la integral tiende a cero al tender R a infinito.

Haciendo tender R hacia infinito en [5], vemos que la función $f(t)$, definida por la Ecuación [1], existe y puede escribirse como

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} [e^{zt} F(z)] \qquad (t > 0). \qquad [8]$$

Ejemplo. Hallemos la función $f(t)$ que corresponde a $F(s) = 12/(s^3 + 8)$. Las singularidades de la función

$$e^{zt} F(z) = \frac{12e^{zt}}{z^3 + 8} \qquad (t > 0) \qquad [9]$$

son las tres raíces cúbicas de -8, a saber

$$z_k = 2 \exp\left[i\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right] \qquad (k = 0, 1, 2),$$

o sea

$$z_0 = 1 + \sqrt{3}i, \quad z_1 = -2, \quad z_2 = 1 - \sqrt{3}i. \qquad [10]$$

Los correspondientes residuos B_k se calculan fácilmente por el método de la Sección 57 para identificar polos simples y hallar sus residuos:

$$B_k = \frac{12 \exp(z_k t)}{3z_k^2} \cdot \frac{z_k}{z_k} = -\frac{z_k}{2} \exp(z_k t) \qquad (k = 0, 1, 2). \qquad [11]$$

Sea ahora z cualquier punto del semicírculo [4], donde $\gamma > 1$ y $R > 2 + \gamma$. Puesto que

$$|z| = |\gamma + Re^{i\theta}| \geqq |\gamma - R| = R - \gamma > 2$$

y

$$|z^3 + 8| \geqq |z|^3 - 8 \geqq (R - \gamma)^3 - 8 > 0,$$

se deduce que

$$|F(z)| \leqq M_R \quad \text{con} \quad M_R = \frac{12}{(R - \gamma)^3 - 8}.$$

De manera que $F(z)$ tiene la propiedad de acotación requerida.

Así pues,

$$f(t) = B_0 + B_1 + B_2;$$

y, si sustituimos los números [10] en [11], llegamos al resultado

$$f(t) = e^{-2t} - e^t(\cos\sqrt{3}t - \sqrt{3}\,\text{sen}\,\sqrt{3}t) \qquad (t > 0). \qquad [12]$$

63. RESIDUOS LOGARITMICOS Y TEOREMA DE ROUCHE

Concluimos este capítulo con un tipo de aplicación completamente diferente del teorema de los residuos. Sea f una función analítica dentro de y sobre un contorno cerrado simple C, positivamente orientado, tal que f no tenga ceros

sobre él. Puede haber sólo un número finito de ceros interiores a C, de acuerdo con el Ejercicio 11; y si z_0 es uno de ellos, z_0 es un punto singular aislado del cociente f'/f. El residuo de ese cociente en z_0 se llama el *residuo logarítmico* de f en z_0, ya que

$$\frac{d}{dz} \log f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

para cualquier rama de la función logaritmo.

Supongamos ahora que el cero z_0 de f es de orden m_0 (Sec. 57). En algún entorno de z_0 podemos escribir

$$f(z) = (z - z_0)^{m_0} g(z),$$

con g analítica en dicho entorno y $g(z_0) \neq 0$. Luego

$$f'(z) = m_0(z - z_0)^{m_0 - 1} g(z) + (z - z_0)^{m_0} g'(z),$$

o sea

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_0}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Como g'/g es analítica en z_0, la función f'/f tiene un polo simple en z_0, con residuo m_0. Es decir, el residuo logarítmico de f en el cero z_0 es el orden m_0 de ese cero. Así, si N_f denota el número de ceros de f, contados con sus multiplicidades, que están dentro de C, el teorema de los residuos nos dice que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_f. \qquad [1]$$

Usaremos ahora la Ecuación [1] para demostrar un importante teorema, conocido como *teorema de Rouché*. Otra demostración se esbozará en el Capítulo 12 (Ejerc. 7, Sec. 105).

Teorema. *Sean f y g dos funciones analíticas en el interior y sobre un contorno cerrado simple C. Si $|f(z)| > |g(z)|$ en todo punto de C, entonces las funciones f y $f + g$ tienen el mismo número de ceros, contados con sus multiplicidades, dentro de C.*

La orientación de C en el enunciado del teorema es, claro está, irrelevante; así que en la demostración que sigue podemos suponer que la orientación es positiva.

Comenzamos la demostración tomando las funciones f y g como se ha dicho en el enunciado, y definiendo una nueva función

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z) + tg'(z)}{f(z) + tg(z)}\,dz \qquad [2]$$

sobre el intervalo $0 \leqq t \leqq 1$. Nótese que el denominador $f(z) + tg(z)$ del integrando no se anula nunca sobre C. En efecto, si z es un punto de C, la condición $|f(z)| > |g(z)|$ nos dice que

$$|f(z) + tg(z)| \geqq ||f(z)| - t|g(z)|| \geqq |f(z)| - |g(z)| > 0.$$

Así queda asegurada la existencia de la integral usada en la definición de $\Phi(t)$. La función $\Phi(t)$ es, además, continua en el intervalo $0 \leqq t \leqq 1$ (véase Ejerc. 10).

Ahora bien, por la Ecuación [1], el valor de la función Φ en cada punto $t(0 \leqq t \leqq 1)$ ha de ser un entero. Como Φ es continua, debe ser constante sobre dicho intervalo, y podemos conluir que $\Phi(0) = \Phi(1)$. El teorema de Rouché está probado por tanto, ya que $\Phi(0) = N_f$ y $\Phi(1) = N_{f+g}$.

Ejemplo. Para determinar el número de raíces de la ecuación $z^7 - 4z^3 + z - 1 = 0$ interiores al círculo $|z| = 1$, escribamos $f(z) = -4z^3$ y $g(z) = z^7 + z - 1$. Observemos que $|f(z)| = 4$ y $|g(z)| \leqq 3$, cuando $|z| = 1$. En consecuencia se satisfacen los requisitos el teorema de Rouché. Así pues, como f tiene tres ceros, contados con sus multiplicidades, interiores al círculo $|z| = 1$, otros tantos tiene $f + g$. Es decir, la ecuación $z^7 - 4z^3 + z - 1 = 0$ tiene tres raíces interiores al círculo $|z| = 1$.

EJERCICIOS

En los Ejercicios 1 a 3, usar el método descrito en la Sección 62, para hallar la función $f(t)$ correspondiente a $F(s)$ dada.

1. $F(s) = \dfrac{2s - 2}{(s + 1)(s^2 + 2s + 5)}$.

Sol. $f(t) = e^{-t}(\text{sen } 2t + \cos 2t - 1)$.

2. $F(s) = \dfrac{2s^3}{s^4 - 4}$.

Sol. $f(t) = \cosh \sqrt{2}t + \cos \sqrt{2}t$.

3. $F(s) = \dfrac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$.

Sol. $f(t) = t \cos at$.

4. Hallar el número de ceros del polinomio

a) $z^6 - 5z^4 + z^3 - 2z$; *b)* $2z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 9$

dentro del círculo $|z| = 1$.

Sol. *a)* 4; *b)* 0.

5. Determinar el número de raíces de la ecuación $2z^5 - 6z^2 + z + 1 = 0$ en la región $1 \leqq |z| < 2$.

Sol. 3.

6. Probar que si c es un número complejo tal que $|c| > e$, la ecuación $cz^n = e^z$ tiene n raíces dentro del círculo $|z| = 1$.

7. Probar, mediante el teorema de Rouché, que cualquier polinomio

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n \qquad (a_n \neq 0),$$

con $n \geqq 1$, tiene exactamente n ceros, contados con sus multiplicidades. Dar así una demostración alternativa del teorema fundamental del álgebra (Sec. 43).

Sugerencia: Nótese que es suficiente tomar a_n igual a la unidad. Entonces, llamando

$$f(z) = z^n \quad \text{y} \quad g(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1},$$

probar que $P(z)$ tiene n ceros dentro de un círculo $|z| = R$, donde R es mayor que los números 1 y $|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|$. Para demostrar que $P(z)$ no tiene otros ceros, demostrar que

$$|z^n + g(z)| \geqq |z|^n - |g(z)| > 0 \quad \text{si} \quad |z| \geqq R.$$

8. Sea f una función con un polo de orden m_p en el punto z_p. Probar que el residuo logarítmico de f en z_p es $-m_p$.

Sugerencia: Consultar el Ejercicio 9, Sección 57.

9. Sea f una función analítica dentro de y sobre un contorno cerrado simple C, positivamente orientado, excepto en un número finito de polos interiores a C. Además, supongamos que f no tiene ceros sobre C y un número finito de ceros interiores a C. Usar el teorema de los residuos junto con los resultados de la Sección 63 y del Ejercicio 8, para demostrar que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P,$$

donde N es el número total de ceros de f dentro de C y P es el número total de polos de f allí. Un cero de orden m_0 ha de contarse m_0 veces y un polo de orden m_p ha de contarse m_p veces. [Comparar con la Ec. [1], Sec. 63.]

10. Sea $\Phi(t)$ la función definida en el intervalo $0 \leqq t \leqq 1$ por la Ecuación [2], Sección 63, y sean t y t_0 dos puntos cualesquiera de ese intervalo.

a) Probar que

$$|\Phi(t) - \Phi(t_0)| = \frac{|t - t_0|}{2\pi} \left| \int_C \frac{fg' - f'g}{(f + tg)(f + t_0 g)}\, dz \right|.$$

b) Explicar por qué

$$\left| \frac{fg' - f'g}{(f + tg)(f + t_0 g)} \right| \leqq \frac{|fg' - f'g|}{(|f| - |g|)^2}$$

en todo punto de C. Demostrar así que existe una constante positiva A, independiente de t y de t_0, tal que

$$|\Phi(t) - \Phi(t_0)| \leqq A|t - t_0|.$$

Concluir de esa desigualdad que $\Phi(t)$ es continua en el intervalo $0 \leqq t \leqq 1$.

11. Recordemos (Sec. 8) que un punto z_0 es punto de acumulación de un conjunto S si todo entorno punteado de z_0 contiene al menos un punto de S. Una forma del *teorema de Bolzano-Weierstrass* puede enunciarse así*. *Un conjunto de infinitos puntos contenidos en una región cerrada y acotada tiene al menos un punto de acumulación en esa región.* Usar el teorema y el resultado del Ejercicio 8, Sección 57, para probar que los ceros de una función no nula f, interiores a un contorno cerrado simple C, son siempre finitos en número. Demostrar que lo mismo es cierto para el número de polos de f interiores a C.

* Véase, por ejemplo, A. E. Taylor y W. R. Mann, *Advanced Calculus*, 3.ª ed., pp. 517 y 521, 1983.

CAPITULO

SIETE

TRANSFORMACIONES POR FUNCIONES ELEMENTALES

La interpretación geométrica de una función de variable compleja como transformación se introdujo en la Sección 10. Allí expusimos cómo se puede visualizar, hasta cierto punto, la naturaleza de una tal función, analizando cómo transforma diversas curvas y regiones.

En este capítulo veremos más ejemplos de cómo ciertas curvas y regiones se transforman bajo funciones analíticas elementales. En los Capítulos 9 y 10 se ilustrarán las aplicaciones de estos resultados a algunos problemas físicos.

64. FUNCIONES LINEALES

Para estudiar la aplicación

$$w = Az, \qquad [1]$$

donde A es una constante compleja no nula y $z \neq 0$, escribimos A y z en forma exponencial:

$$A = ae^{i\alpha}, \quad z = re^{i\theta}.$$

Entonces

$$w = (ar)e^{i(\alpha+\theta)}; \qquad [2]$$

y vemos de la Ecuación [2] que la transformación [1] dilata (o contrae) el radio vector que representa a z por un factor $a = |A|$ y lo gira un ángulo $\alpha = \arg A$ en torno al origen. La imagen de una región dada es, por tanto, geométricamente similar a esa región.

La aplicación

$$w = z + B, \qquad [3]$$

donde B es cualquier constante compleja, es una traslación mediante el vector que representa a B. Esto es, si

$$w = u + iv, \quad z = x + iy \quad \text{y} \quad B = b_1 + ib_2,$$

entonces la imagen de cualquier punto (x, y) del plano x es el punto

$$(u, v) = (x + b_1, y + b_2) \qquad [4]$$

en el plano w. Como cada punto de cualquier región del plano z se aplica en el plano w de ese modo, la región imagen es geométricamente congruente a la original.

La *transformación lineal* general (no constante)

$$w = Az + B, \quad (A \neq 0) \qquad [5]$$

que es composición de las transformaciones

$$Z = Az \quad (A \neq 0) \quad \text{y} \quad w = Z + B,$$

es evidentemente una dilatación o contracción y una rotación, seguida de una traslación.

Ejemplo. La transformación

$$w = (1 + i)z + (2 - i) \qquad [6]$$

aplica la región rectangular que se muestra en la Figura 62 sobre la región rectangular del plano w que allí se indica. Esto se comprueba escribiendo la transformación [6] como composición de las transformaciones

$$Z = (1 + i)z \quad \text{y} \quad w = Z + (2 - i).$$

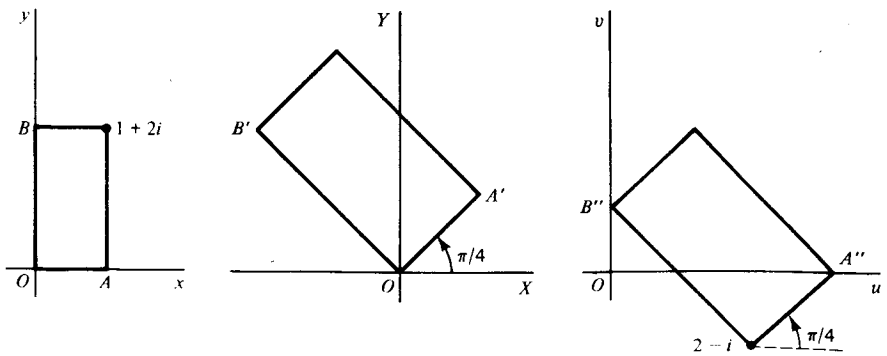


Figura 62. $w = (1 + i)z + (2 - i)$.

Como $1 + i = \sqrt{2}\exp(i\pi/4)$, la primera de ellas es una dilatación de factor $\sqrt{2}$ y una rotación de ángulo $\pi/4$. La segunda es una traslación de dos unidades a la derecha y una unidad hacia abajo.

65. LA FUNCION $1/z$

La ecuación

$$w = \frac{1}{z} \qquad [1]$$

establece una correspondencia uno a uno entre los puntos no nulos de los planos z y w. Ya que $z\bar{z} = |z|^2$, la aplicación puede ser descrita por medio de las transformaciones sucesivas

$$Z = \frac{1}{|z|^2}\, z, \quad w = \bar{Z}. \qquad [2]$$

La primera de ellas es una inversión con respecto al círculo unidad $|z| = 1$. Es decir, la imagen de un punto no nulo z es el punto Z con las propiedades

$$|Z| = \frac{1}{|z|} \quad \text{y} \quad \arg Z = \arg z.$$

Así pues, los puntos exteriores al círculo $|z| = 1$ se aplican sobre los puntos interiores a él, excluido el cero (Fig. 63), y recíprocamente. Cualquier punto del círculo se transforma en sí mismo. La segunda de las transformaciones [2] es simplemente una reflexión en el eje real.

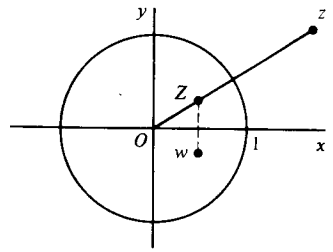


Figura 63

Puesto que

$$\lim_{z \to 0} \frac{1}{z} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{z \to \infty} \frac{1}{z} = 0$$

(véase Sec. 13), es natural definir una transformación uno a uno $w = T(z)$ del plano z extendido sobre el plano w extendido, haciendo

$$T(0) = \infty, \quad T(\infty) = 0 \quad \text{y} \quad T(z) = \frac{1}{z}$$

para los restantes valores de z. Como ya se hizo constar en el Ejercicio 11, Sección 14, T es entonces continua en el plano z extendido. Por esta razón, cuando queda involucrado el punto, el infinito en una discusión relativa a la función $1/z$, se supone tácitamente que hablamos de $T(z)$.

Cuando un punto $w = u + iv$ es la imagen de un punto no nulo $z = x + iy$ bajo la transformación $w = 1/z$, llamando $w = \bar{z}/|z|^2$ vemos que

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}. \qquad [3]$$

Entonces, $z = 1/w = \bar{w}/|w|^2$,

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{-v}{u^2 + v^2}. \qquad [4]$$

El siguiente argumento, basado en esas relaciones entre coordenadas, enseña que *la aplicación $w = 1/z$ transforma círculos y rectas en círculos y rectas*. Si a, b, c y d son números reales que satisfacen la condición $b^2 + c^2 > 4ad$, la ecuación

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0 \qquad [5]$$

representa un círculo o recta arbitrarios, donde $a \neq 0$ para un círculo y $a = 0$ para una recta. Si x e y satisfacen la Ecuación [5], podemos utilizar las relaciones [4] para sustituir esas variables. Tras algunas simplificaciones, encontramos que u y v cumplen la ecuación

$$d(u^2 + v^2) + bu - cv + a = 0, \qquad [6]$$

que representa también un círculo o una recta. Recíprocamente, si u y v satisfacen la Ecuación [6], se deduce de [3] que x e y cumplen la Ecuación [5].

Resulta claro ahora de las ecuaciones [5] y [6] que:

a) Un círculo ($a \neq 0$) que no pasa por el origen ($d \neq 0$) en el plano z se transforma en el plano w en un círculo que no pasa por el origen.

b) Un círculo ($a \neq 0$) que pasa por el origen ($d = 0$) en el plano z se transforma en el plano w en una recta que no pasa por el origen.

c) Una recta ($a = 0$) que no pasa por el origen ($d \neq 0$) en el plano z se transforma en el plano w en un círculo que pasa por el origen.

d) Una recta ($a = 0$) que pasa por el origen ($d = 0$) en el plano z se transforma en el plano w en una recta que pasa por el origen.

Ejemplo 1. De acuerdo con las Ecuaciones [5] y [6], una recta vertical $x = c_1$ ($c_1 \neq 0$) se transforma bajo $w = 1/z$ en el círculo $-c_1(u^2 + v^2) + u = 0$, o sea

$$\left(u - \frac{1}{2c_1}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2, \qquad [7]$$

centrado en el eje u y tangente al eje v. La imagen de un punto típico (c_1, y) de esa recta es, según las ecuaciones [3],

$$(u, v) = \left(\frac{c_1}{c_1^2 + y^2}, \frac{-y}{c_1^2 + y^2}\right).$$

Si $c_1 > 0$, el círculo está a la derecha del eje v. Al mover el punto (c_1, y) hacia arriba por toda la recta, su imagen atraviesa el círculo una vez en el sentido de las agujas del reloj, correspondiendo el punto del infinito en el plano z extendido al origen del plano w. En efecto, si $y < 0$ entonces $v > 0$; y al crecer y desde valores negativos hasta 0, u crece desde 0 hasta $1/c_1$. Entonces, cuando y crece por valores positivos, v es negativa y u decrece hacia 0.

Por otra parte, si $c_1 < 0$, el círculo está a la izquierda del eje v. Al subir el punto (c_1, y), su imagen describe de nuevo un círculo, pero ahora en sentido positivo. Ver la Figura 64, donde se ilustran los casos $c_1 = 1/3$ y $c_1 = -1/2$.

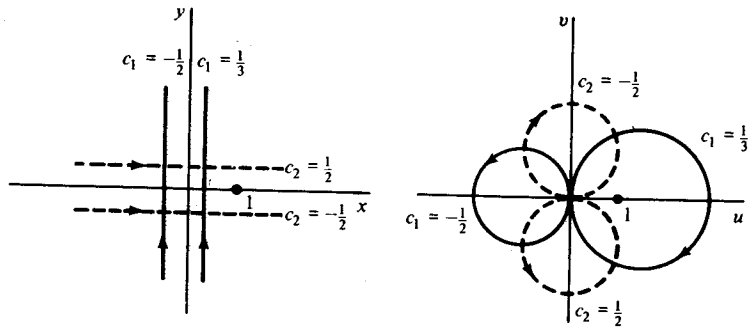


Figura 64. $w = 1/z$.

Ejemplo 2. La transformación $w = 1/z$ aplica una recta horizontal $y = c_2$ ($c_2 \neq 0$) sobre el círculo

$$u^2 + \left(v + \frac{1}{2c_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2c_2}\right)^2, \qquad [8]$$

centrado en el eje v y tangente al eje u. En la Figura 64 se muestran dos casos especiales, donde las orientaciones correspondientes de las rectas y círculos han sido, asimismo, indicadas.

Ejemplo 3. De la primera de las Ecuaciones [4] vemos que cuando $w = 1/z$, las imágenes de puntos del semiplano $x > c_1$ ($c_1 > 0$) están en la región

$$\frac{u}{u^2 + v^2} > c_1, \qquad [9]$$

es decir,

$$\left(u - \frac{1}{2c_1}\right)^2 + v^2 < \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2.$$

Esto es, la imagen de cualquier punto del semiplano $x > c_1$ está dentro del círculo

$$\left(u - \frac{1}{2c_1}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2. \qquad [10]$$

Recíprocamente, todo punto interior al círculo [10] satisface la desigualdad [9] y es, por tanto, imagen de un punto del semiplano. En consecuencia, la imagen del semiplano es el dominio circular entero.

Otra forma de obtener ese resultado consiste en referirnos al Ejemplo 1 y observar que la imagen de la recta $x = c$, donde $c > c_1$, es el círculo

$$\left(u - \frac{1}{2c}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{2c}\right)^2. \qquad [11]$$

Al crecer c por todos los valores mayores que c_1, las rectas $x = c$ se desplazan a la derecha y los círculos imagen [11] son interiores al círculo [10] y se contraen en tamaño (véase Fig. 65). Además, las rectas $x = c$ llenan el semiplano $x > c_1$, mientras que los círculos [11] llenan todo el interior del círculo [10].

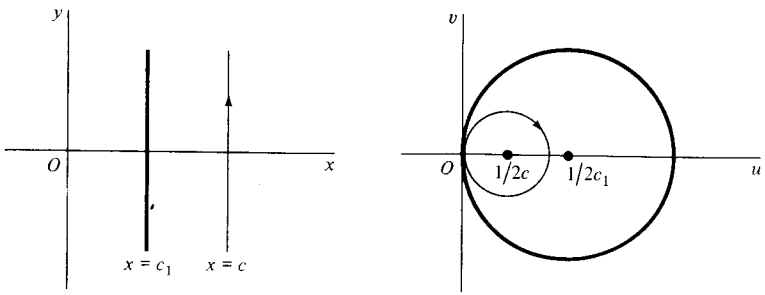


Figura 65. $w = 1/z$.

EJERCICIOS

1. Explicar por qué la transformación $w = iz$ es una rotación del plano z de ángulo $\pi/2$, y hallar a continuación la imagen de la banda infinita $0 < x < 1$.

   Sol. $0 < v < 1$.

2. Probar que la transformación $w = iz + i$ aplica el semiplano $x > 0$ sobre el semiplano $v > 1$.

3. Hallar la región imagen del semiplano $y > 0$ bajo la transformación $w = (1 + i)z$ usando: *a*) coordenadas polares; *b*) coordenadas rectangulares. Representar esa región.

   Sol. $v > u$.

4. Hallar la imagen del semiplano $y > 1$ bajo la transformación $w = (1 - i)z$.

5. Hallar la imagen de la franja semiinfinita $x > 0$, $0 < y < 2$ bajo la transformación $w = iz + 1$. Dibujar la franja y su imagen.

   Sol. $-1 < u < 1$, $v < 0$.

6. Dar una descripción geométrica de la transformación $w = A(z + B)$, donde A y B son constantes complejas, con $A \neq 0$.

7. Probar que si $c_1 < 0$, la imagen del semiplano $x < c_1$ bajo la transformación $w = 1/z$ es el interior de un círculo. ¿Cuál es la imagen cuando $c_1 = 0$?

8. Demostrar que la imagen del semiplano $y > c_2$ bajo la transformación $w = 1/z$ es el interior de un círculo, supuesto que $c_2 > 0$. Hallar la imagen cuando $c_2 < 0$ y cuando $c_2 = 0$.

9. Hallar la imagen de la banda infinita $0 < y < 1/(2c)$ bajo la transformación $w = 1/z$. Esbozar una gráfica de la banda y su imagen.

   Sol. $u^2 + (v + c)^2 > c^2$, $v < 0$.

10. Hallar la imagen del cuadrante $x > 1$, $y > 0$ bajo la transformación $w = 1/z$.

    Sol. $(u - \frac{1}{2})^2 + v^2 < (\frac{1}{2})^2$, $v < 0$.

11. Verificar la aplicación, bajo $w = 1/z$, de las regiones y partes de los contornos que se indican en: *a*) Figura 4 del Apéndice 2; *b*) Figura 5 del Apéndice 2.

12. Describir geométricamente la transformación $w = 1/(z - 1)$.

13. Describir geométricamente la transformación $w = i/z$. Explicar por qué transforma círculos y rectas en círculos y rectas.

14. Hallar la imagen de la franja semiinfinita $x > 0$, $0 < y < 1$ bajo la transformación $w = i/z$. Representar la franja y su imagen.

    Sol. $(u - \frac{1}{2})^2 + v^2 > (\frac{1}{2})^2$, $u > 0$, $v > 0$.

15. Escribiendo $w = r \exp(i\phi)$, probar que la aplicación $w = 1/z$ transforma la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ en la lemniscata $\rho^2 = \cos 2\phi$. (Véase Ejerc. 18, Sec. 4.)

16. Sea el círculo $|z| = 1$ orientado positivamente (sentido contrario a las agujas del reloj). Determinar la orientación de su imagen bajo la transformación $w = 1/z$.

17. Probar que cuando un círculo se transforma en un círculo bajo $w = 1/z$, el centro del círculo original *nunca* se aplica sobre el centro de su círculo imagen.

66. TRANSFORMACIONES RACIONALES LINEALES

La transformación

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad - bc \neq 0), \qquad [1]$$

donde a, b, c y d son constantes complejas, se llama una *transformación racional lineal*, o transformación de Möbius. Nótese que la Ecuación [1] se puede expresar en la forma

$$Azw + Bz + Cw + D = 0 \qquad (AD - BC \neq 0) \qquad [2]$$

y, recíprocamente, toda ecuación del tipo [2] puede ponerse en la forma [1]. Como esta forma alternativa es lineal en z y lineal en w, o sea, bilineal en z y w, otra denominación para una transformación racional lineal es *transformación bilineal*.

Cuando $c = 0$, la condición $ad - bc \neq 0$ para [1] se convierte en $ad \neq 0$, y vemos que la transformación se reduce a una función lineal no constante. Cuando $c \neq 0$, la Ecuación [1] admite la expresión

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c}\,\frac{1}{cz + d} \qquad (ad - bc \neq 0). \qquad [3]$$

Luego, de nuevo, la condición $ad - bc \neq 0$ asegura que no se trata de una función constante. La transformación $w = 1/z$ es, claro está, un caso particular de la transformación [1] cuando $c \neq 0$.

La Ecuación [3] revela que cuando $c \neq 0$, una transformación racional lineal es composición de dos aplicaciones

$$Z = cz + d, \quad W = \frac{1}{Z}, \quad w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c}\,W \quad (ad + bc \neq 0).$$

Se sigue, por tanto, que una *tranformación racional lineal siempre transforma círculos y rectas en círculos y rectas*, puesto que esas transformaciones racionales lineales especiales lo hacen. (Véanse Secs. 64 y 65.)

Despejando z en [1], se llega a

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a} \qquad (ad - bc \neq 0). \qquad [4]$$

Así pues, cuando un punto w dado es imagen de algún punto z bajo la transformación [1], el punto z se recupera mediante la Ecuación [4]. Si $c = 0$, de modo que a y d son ambos no nulos, cada punto del plano w es obviamente imagen de un punto, y sólo uno, del plano z. Lo mismo es cierto si $c \neq 0$, excepto cuando $w = a/c$, pues el denominador de la Ecuación [4] se anula si w tiene ese valor. Podemos, no obstante, ampliar el dominio de definición de la transformación [1] con el fin de definir una transformación racional lineal T sobre el plano z extendido de manera tal que el punto $w = a/c$ sea la imagen de $z = \infty$ cuando $c \neq 0$. En primer lugar escribimos

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad - bc \neq 0). \qquad [5]$$

Además hacemos

$$T(\infty) = \infty \qquad \text{si} \quad c = 0$$

y

$$T(\infty) = \frac{a}{c} \quad \text{y} \quad T\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty \qquad \text{si} \quad c \neq 0.$$

En vista del Ejercicio 9, Sección 14, eso hace que T sea continua sobre el plano z extendido. Coincide también con la forma en que ampliamos el dominio de definición de la transformación $w = 1/z$ en la Sección 65.

Cuando ese dominio de definición se amplía de ese modo, la transformación racional lineal [5] es una aplicación *uno a uno* del plano z extendido *sobre* el plano w extendido. Es decir, $T(z_1) \neq T(z_2)$ siempre que $z_1 \neq z_2$, y para cada punto w existe un punto z tal que $T(z) = w$. Por tanto, asociada con la transformación T existe una *transformación inversa* T^{-1} que se define sobre el plano w extendido como

$$T^{-1}(w) = z \qquad \text{si y sólo si} \quad T(z) = w.$$

De la Ecuación [4] vemos que

$$T^{-1}(w) = \frac{-dw + b}{cw - a} \qquad (ad - bc \neq 0).$$

Es evidente que T^{-1} es ella misma una transformación racional lineal, con

$$T^{-1}(\infty) = \infty \qquad \text{si} \quad c = 0$$

y

$$T^{-1}\left(\frac{a}{c}\right) = \infty \quad \text{y} \quad T^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c} \qquad \text{si} \quad c \neq 0.$$

Si T y S son dos transformaciones racionales lineales, entonces también lo es su composición $S[T(z)]$. Eso se puede comprobar combinando expresiones del tipo [5]. Nótese que, en particular, $T^{-1}[T(z)] = z$ para todo punto z del plano extendido.

Existe siempre una transformación racional lineal que aplica tres puntos distintos z_1, z_2, z_3, respectivamente, sobre tres puntos distintos prefijados w_1, w_2 y w_3. En efecto, la ecuación

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)} \qquad [6]$$

define una tal transformación cuando ninguno de esos puntos es el punto del infinito. Para verificarlo, escribamos la Ecuación [6] como

$$(z - z_3)(w - w_1)(z_2 - z_1)(w_2 - w_3) = (z - z_1)(w - w_3)(z_2 - z_3)(w_2 - w_1). \qquad [7]$$

Si $z = z_1$, el miembro de la derecha de la Ecuación [7] es cero, luego $w = w_1$. Análogamente, si $z = z_3$, el miembro de la izquierda es cero y, por consiguiente, $w = w_3$. Si $z = z_2$, tenemos la ecuación lineal

$$(w - w_1)(w_2 - w_3) = (w - w_3)(w_2 - w_1),$$

cuya única solución es $w = w_2$. La transformación definida por la Ecuación [6] es realmente una transformación racional lineal, como se ve desarrollando los productos en [7] y expresando el resultado en la forma [2]. La condición $AD - BC \neq 0$ para [2] se satisface claramente, pues, tal como se ha demostrado, la Ecuación [6] no define una función constante. Dejamos al cuidado del lector (Ejerc. 10, Sec. 67) probar que la Ecuación [6] define la *única* transformación racional lineal que aplica los puntos z_1, z_2 y z_3 sobre w_1, w_2 y w_3, respectivamente.

Ejemplo 1. Para hallar la transformación racional lineal que aplica los puntos $z_1 = -1$, $z_2 = 0$ y $z_3 = 1$, respectivamente, en los puntos $w_1 = -i$, $w_2 = 1$ y $w_3 = i$, basta sustituir esos números en la Ecuación [6] y despejar w en términos de z. El resultado es

$$w = \frac{i - z}{i + z}.$$

En la Ecuación [6] se puede introducir el punto del infinito como uno de los puntos prefijados, ya sea en el plano z o en el w. Si, por ejemplo, w_2 es ∞, reemplazamos w_2 por $1/w_2$ en [6] y entonces, tras quitar fracciones en el numerador y en el denominador, hacemos $w_2 = 0$. Eso conduce a la ecuación

$$\frac{w - w_1}{w - w_3} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}. \qquad [8]$$

Ejemplo 2. Sean $z_1 = 1$, $z_2 = 0$, $z_3 = -1$ y $w_1 = i$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1$. Sustituyendo los valores dados en la Ecuación [8] llegamos a que

$$w = \frac{(1 + i)z + (i - 1)}{2z}.$$

67. TRANSFORMACIONES DEL SEMIPLANO SUPERIOR

Hallemos todas las transformaciones racionales lineales que aplican el semiplano superior $\operatorname{Im} z > 0$ sobre el disco abierto $|w| < 1$ y el contorno $\operatorname{Im} z = 0$ en el contorno $|w| = 1$ (Fig. 66).

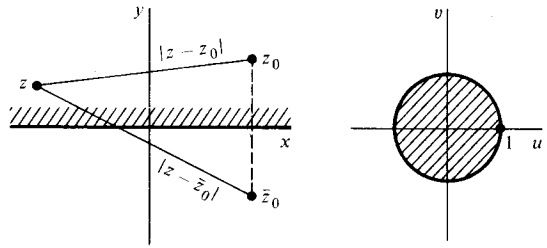


Figura 66. $w = e^{i\alpha}\dfrac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}$ $(\operatorname{Im} z_0 > 0)$.

Teniendo en cuenta que los puntos de la recta $\operatorname{Im} z = 0$ se transforman en puntos del círculo $|w| = 1$, empezamos seleccionando los puntos $z = 0$, $z = 1$ y $z = \infty$ sobre la recta y determinando condiciones necesarias sobre una transformación racional lineal

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad - bc \neq 0) \qquad [1]$$

para que las imágenes de esos puntos tengan módulo unidad.

Observemos que $c \neq 0$ porque, según la Sección 66, la imagen del punto $z = \infty$ es $w = \infty$ cuando $c = 0$. Vimos también en la Sección 66 que la imagen del punto $z = \infty$ es el punto $w = a/c$ si $c \neq 0$. Así que el exigir $|w| = 1$ cuando $z = \infty$ significa que $|a/c| = 1$. Por tanto,

$$|a| = |c| \neq 0. \qquad [2]$$

Además, como $|w| = 1$ para $z = 0$, vemos de la Ecuación [1] que $|b/d| = 1$. Por tanto,

$$|b| = |d| \neq 0. \qquad [3]$$

El hecho de que a y c sean no nulos nos permite reformular [1] como

$$w = \left(\frac{a}{c}\right)\frac{z + (b/a)}{z + (d/c)};$$

y, ya que $|a/c| = 1$ y que b y d son distintos de cero, podemos poner eso en la forma

$$w = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{z - z_1}, \qquad [4]$$

donde α es una constante real, y z_0, z_1 son constantes complejas no nulas. Puesto que

$$\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{d}{c}\right|,$$

de acuerdo con [2] y [3], sabemos que $|z_1| = |z_0|$.

A continuación, imponemos sobre la transformación [4] la condición de que $|w| = 1$ cuando $z = 1$. Eso hace que

$$|1 - z_1| = |1 - z_0|,$$

o sea

$$(1 - z_1)(1 - \bar{z}_1) = (1 - z_0)(1 - \bar{z}_0).$$

Pero $z_1\bar{z}_1 = z_0\bar{z}_0$, ya que $|z_1| = |z_0|$, y la relación anterior se reduce a

$$z_1 + \bar{z}_1 = z_0 + \bar{z}_0;$$

es decir, $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_0$. Se deduce que o bien $z_1 = z_0$ o $z_1 = \bar{z}_0$, de nuevo debido a que $|z_1| = |z_0|$. Si $z_1 = z_0$, la transformación [4] pasa a ser la función constante $w = \exp(i\alpha)$; luego $z_1 = \bar{z}_0$.

La transformación [4], con $z_1 = \bar{z}_0$, aplica el punto z_0 en el origen $w = 0$; y como los puntos interiores al círculo $|w| = 1$ han de ser imágenes de los puntos que están *por encima* del eje real del plano z, concluimos que $\operatorname{Im} z_0 > 0$. Cualquier transformación racional lineal que posea la propiedad enunciada al comienzo de esta sección debe tener, en consecuencia, la forma

$$w = e^{i\alpha}\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \qquad (\operatorname{Im} z_0 > 0), \qquad [5]$$

con α real.

Queda por demostrar que, recíprocamente, cualquier transformación racional lineal del tipo [5] tiene la propiedad deseada. Ello es fácil sin más que tomar el

valor absoluto de cada lado en la Ecuación [5] e interpretando la ecuación resultante,

$$|w| = \frac{|z - z_0|}{|z - \bar{z}_0|},$$

geométricamente. Si un punto z está por encima del eje real, tanto él como z_0 están del mismo lado de ese eje, que es el bisector perpendicular del segmento recto que une z_0 con $\bar{z}_0$. Se sigue que la distancia $|z - z_0|$ es menor que la distancia $|z - \bar{z}_0|$ (Fig. 66); esto es, $|w| < 1$. Análogamente, si z está por debajo del eje real, la distancia $|z - z_0|$ es mayor que la distancia $|z - \bar{z}_0|$ y, por tanto, $|w| > 1$. Finalmente, si z está sobre el eje real, $|w| = 1$ porque en ese caso $|z - z_0| = |z - \bar{z}_0|$. Como toda transformación racional lineal es una aplicación uno a uno del plano z extendido sobre el plano w extendido, eso demuestra que *la transformación* [5] *aplica el semiplano superior* $\operatorname{Im} z > 0$ *sobre el disco abierto* $|w| < 1$ *y la frontera del semiplano sobre la del disco.*

Ejemplo 1. La transformación $w = (i - z)/(i + z)$ del Ejemplo 1, Sección 66, se puede escribir

$$w = e^{i\pi}\frac{z - i}{z - \bar{i}}.$$

Por tanto tiene la propiedad antedicha.

Las imágenes del semiplano superior $\operatorname{Im} z \geqq 0$ bajo otros tipos de transformaciones racionales lineales suelen ser fáciles de averiguar examinando la transformación particular en cuestión.

Ejemplo 2. Llamando $z = x + iy$, $w = u + iv$, podemos probar sin dificultad que la transformación

$$w = \frac{z - 1}{z + 1} \qquad [6]$$

aplica el semiplano $y > 0$ sobre el semiplano $v > 0$, y el eje x sobre el eje u. Notemos primero que si z es real, también w lo es. En consecuencia, ya que la imagen del eje real $y = 0$ es o un círculo o una recta, ha de ser el eje real $v = 0$. Más aún, para cualquier punto w en el plano w finito,

$$v = \operatorname{Im} w = \operatorname{Im}\frac{(z - 1)(\bar{z} + 1)}{(z + 1)(\overline{z + 1})} = \frac{2y}{|z + 1|^2} \qquad (z \neq -1).$$

Así que los números y, v tienen el mismo signo, lo cual significa que los puntos por encima del eje x corresponden a puntos por encima el eje u, y que puntos por

debajo del eje x corresponden a puntos por debajo del eje u. Finalmente, como los puntos del eje x corresponden a puntos del eje u, y por ser las transformaciones racionales lineales aplicaciones uno a uno del plano extendido sobre el plano extendido (Sec. 66), queda establecido la propiedad deseada para la transformación [6].

EJERCICIOS

1. Hallar la transformación racional lineal que aplica los puntos $z_1 = 2$, $z_2 = i$, $z_3 = -2$ sobre los puntos $w_1 = 1$, $w_2 = i$, $w_3 = -1$.

Sol. $w = (3z + 2i)/(iz + 6)$.

2. Hallar la transformación racional lineal que aplica los puntos $z_1 = -i$, $z_2 = 0$, $z_3 = i$ sobre los puntos $w_1 = -1$, $w_2 = i$, $w_3 = 1$. ¿En qué curva se transforma el eje imaginario $x = 0$?

3. Hallar la transformación bilineal que aplica los puntos $z_1 = \infty$, $z_2 = i$, $z_3 = 0$ sobre los puntos $w_1 = 0$, $w_2 = i$, $w_3 = \infty$.

Sol. $w = -1/z$.

4. Hallar la transformación bilineal que aplica los puntos z_1, z_2, z_3 sobre los puntos $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = \infty$.

Sol. $$w = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}.$$

5. Probar que una composición de dos transformaciones racionales lineales es también una transformación racional lineal, tal como se afirmó en la Sección 66.

6. Un *punto fijo* de una transformación $w = f(z)$ es un punto z_0 tal que $f(z_0) = z_0$. Demostrar que toda tranformación racional lineal, excepto la transformación identidad $w = z$, tiene a lo sumo dos puntos fijos en el plano extendido.

7. Hallar los puntos fijos (Ejerc. 6) de la transformación:

a) $w = (z - 1)/(z + 1)$; *b)* $w = (6z - 9)/z$.

Sol. *a)* $z = \pm i$; *b)* $z = 3$.

8. Modificar la Ecuación [6], Sección 66, para el caso en que ambos, z_2 y w_2, son el punto del infinito. Probar entonces que toda transformación racional lineal debe ser de la forma $w = az (a \neq 0)$ cuando sus puntos fijos (Ejerc. 6) son 0 e ∞.

9. Probar que si el origen es un punto fijo (Ejerc. 6) de una transformación racional lineal, entonces la transformación se puede escribir en la forma $w = z/(cz + d)$, donde $d \neq 0$.

10. Probar que existe sólo una transformación racional lineal que aplica tres puntos distintos z_1, z_2 y z_3 en el plano z extendido sobre tres puntos prefijados distintos w_1, w_2 y w_3 en el plano w extendido.

Sugerencia: Sean T y S dos de tales transformaciones. Entonces, tras razonar por qué $S^{-1}[T(z_k)] = z_k$ $(k = 1, 2, 3)$, usar los resultados de los Ejercicios 5 y 6 para demostrar que $S^{-1}[T(z)] = z$, para todo z. Probar así que $T(z) = S(z)$ para todo z.

11. Sabemos (Sec. 67) que la transformación $w = (i - z)/(i + z)$ aplica el semipiano $\operatorname{Im} z > 0$ sobre el disco $|w| < 1$, y el contorno del semiplano sobre el contorno del disco. Probar que un punto $z = x$ se aplica en el punto

$$w = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} + i\frac{2x}{1 + x^2},$$

y completar entonces la verificación de la aplicación ilustrada en la Figura 13, Apéndice 2, viendo qué segmentos del eje x se aplican como allí se indicó.

12. Verificar la aplicación de la Figura 12, Apéndice 2, donde $w = (z - 1)/(z + 1)$.

Sugerencia: Escribir la transformación dada como composición de las aplicaciones

$$Z = iz, \quad W = \frac{i - Z}{i + Z}, \quad w = -W.$$

Consultar después la aplicación verificada en el Ejercicio 11.

13. *a)* Hallando la inversa de la transformación $w = (i - z)/(i + z)$ y recurriendo a la Figura 13, Apéndice 2, que ha sido verificada en el Ejercicio 11, probar que la transformación $w = i(1 - z)/(1 + z)$ aplica el disco $|z| \leqq 1$ sobre el semiplano superior $\operatorname{Im} w \geqq 0$.

b) Demostrar que la transformación racional lineal $w = (z - 2)/z$ puede escribirse

$$Z = z - 1, \quad W = i\frac{1 - Z}{1 + Z}, \quad w = iW.$$

Entonces, con ayuda del resultado de la parte *a)*, comprobar que la transformación $w = (z - 2)/z$ aplica el disco $|z - 1| \leqq 1$ sobre el semiplano izquierdo $\operatorname{Re} w \leqq 0$.

14. La transformación [5], Sección 67, aplica el punto $z = \infty$ sobre el punto $w = \exp(i\alpha)$, que está en el contorno del disco $|w| \leqq 1$. Probar que si $0 < \alpha < 2\pi$ y los puntos $z = 0$ y $z = 1$ han de aplicarse sobre los puntos $w = 1$ y $w = \exp(i\alpha/2)$, respectivamente, entonces la transformación es

$$w = e^{i\alpha}\frac{z + \exp(-i\alpha/2)}{z + \exp(i\alpha/2)}.$$

15. Nótese que cuando $\alpha = \pi/2$ la transformación del Ejercicio 14 se convierte en

$$w = \frac{iz + \exp(i\pi/4)}{z + \exp(i\pi/4)}.$$

Comprobar que este caso especial aplica los puntos del eje x de la forma indicada en la Figura 67.

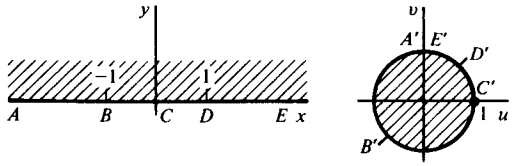


Figura 67. $w = \dfrac{iz + \exp(i\pi/4)}{z + \exp(i\pi/4)}$.

16. Demostrar que si $\operatorname{Im} z_0 < 0$, la transformación [5], Sección 67, aplica el semiplano inferior $\operatorname{Im} z \leqq 0$ sobre el disco unidad $|w| \leqq 1$.

17. Con ayuda de la Ecuación [6], Sección 66, probar que si una transformación racional lineal aplica cada punto del eje x en el eje u, los coeficientes de la transformación son todos reales, salvo un posible factor común complejo. El recíproco es evidentemente cierto.

68. LA TRANSFORMACION $w = \exp z$ Y LOS LOGARITMOS

La transformación $w = e^z$ se puede expresar como $\rho e^{i\phi} = e^x e^{iy}$, donde $z = x + iy$ y $w = \rho e^{i\phi}$. Luego (véase Sec. 6) $\rho = e^x$ y $\phi = y + 2k\pi$, donde k es un entero arbitrario; y la anterior transformación del plano z al plano w puede ponerse en la forma

$$\rho = e^x, \quad \phi = y. \qquad [1]$$

La imagen de un punto típico $z = (c_1, y)$ sobre una recta vertical $x = c_1$ tiene coordenadas polares $\rho = \exp(c_1)$ y $\phi = y$ en el plano w. Esa imagen se mueve en sentido positivo a lo largo del círculo que muestra la Figura 68 cuando z se mueve hacia arriba por la recta. La imagen de la recta es evidentemente todo el círculo, y cada punto del círculo es imagen de infinitos puntos, separados entre sí 2π unidades a lo largo de la recta.

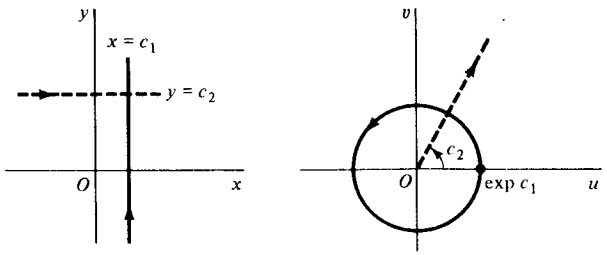


Figura 68. $w = \exp z$.

Una recta horizontal $y = c_2$ se aplica de manera uno a uno sobre el rayo $\phi = c_2$. Al desplazarse el punto $z = (x, c_2)$ por esa recta de izquierda a derecha,

la coordenada $\rho = e^x$ del punto imagen sobre el rayo crece por todos los valores positivos, como indica la Figura 68.

Los *segmentos* de rectas verticales y horizontales se aplican, respectivamente, sobre porciones de círculos y rayos, y las imágenes de diversas regiones se obtienen fácilmente de estas observaciones.

Ejemplo 1. Vamos a probar que la transformación $w = e^z$ aplica la región rectangular $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$ sobre la región $e^a \leqq \rho \leqq e^b$, $c \leqq \phi \leqq d$. Las dos regiones y partes correspondientes de sus fronteras han sido representadas en la Figura 69. El segmento de recta vertical AD se aplica sobre el arco $\rho = e^a$, $c \leqq \phi \leqq d$, marcado como $A'D'$. Las imágenes de segmentos de recta verticales a la derecha de AD y que unen las partes horizontales de la frontera son arcos mayores; eventualmente, la imagen del segmento de recta BC es el arco $\rho = e^b$, $c \leqq \phi \leqq d$, señalado como $B'C'$. La aplicación es uno a uno si $d - c < 2\pi$. En particular, si $c = 0$ y $d = \pi$, entonces $0 \leqq \phi \leqq \pi$; y la región rectangular se aplica sobre la mitad de un anillo circular, como se ve en la Figura 8, Apéndice 2.

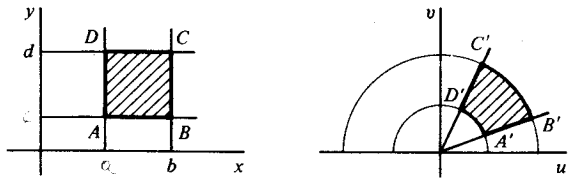


Figura 69. $w = \exp z$.

Ejemplo 2. Cuando $w = e^z$, la imagen de la banda infinita $0 < y < \pi$ es el semiplano superior $\rho > 0$, $0 < \phi < \pi$, pues las imágenes de las rectas horizontales $y = c_2$ $(0 < c_2 < \pi)$ son rayos $\phi = c_2$. Partes correspondientes de los contornos de ambas regiones se muestran en la Figura 6 del Apéndice 2. Los puntos frontera $z = 0$ y $z = \pi i$ corresponden a los puntos $w = 1$ y $w = -1$, respectivamente.

Esta aplicación de una franja sobre un semiplano se sigue también del hecho de que los segmentos rectos verticales $x = c_1$, $0 < y < \pi$ se transforman en semicírculos $\rho = \exp c_1$, $0 < \phi < \pi$.

Cualquier rama

$$w = \log z = \ln r + i\theta \qquad (r > 0,\ \alpha < \theta < \alpha + 2\pi) \qquad [2]$$

de la función logarítmica (véase Sec. 26) aplica su dominio de definición de forma uno a uno sobre la franja $\alpha < v < \alpha + 2\pi$ en el plano w (Fig. 70). Eso es sencillo de ver haciendo mover un punto $z = r\exp(i\theta_0)$, con $\alpha < \theta_0 < \alpha + 2\pi$, hacia el exterior, a partir del origen, por el rayo $\theta = \theta_0$. Su imagen es, claro está, el punto cuyas coordenadas *rectangulares* en el plano w son $(\ln r, \theta_0)$. Por tanto, la imagen se mueve hacia la derecha a lo largo de toda la recta horizontal $v = \theta_0$. Como estas rectas llenan la franja $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$ al variar θ_0 entre α y $\alpha + 2\pi$, la aplicación de la franja es, evidentemente, uno a uno.

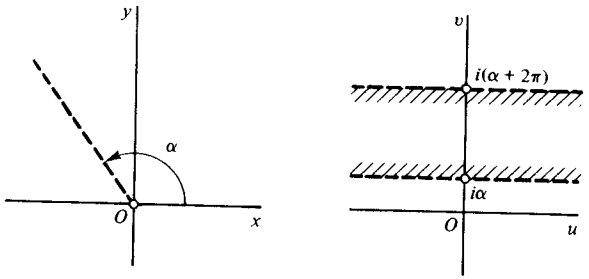


Figura 70. $w = \log z \quad (|z| > 0,\ \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi)$.

La aplicación descrita arriba es consistente con el hecho de que $\exp(\log z) = z$ cuando $z \neq 0$ (Sec. 27). En efecto, según las observaciones hechas al comienzo de esta sección, la transformación $z = \exp w$ es una aplicación uno a uno de la recta horizontal $v = \theta_0$ sobre el rayo $\theta = \theta_0$ en el plano z.

Las aplicaciones logarítmicas pueden ser útiles en la práctica, y concluiremos esta sección con una aplicación que necesitaremos más adelante en el Capítulo 9 (Sec. 79).

Ejemplo 3. La transformación

$$w = \operatorname{Log} \frac{z - 1}{z + 1}, \qquad [3]$$

donde se usa la rama principal de la función logaritmo, es la composición de las funciones

$$Z = \frac{z - 1}{z + 1} \quad \text{y} \quad w = \operatorname{Log} Z. \qquad [4]$$

Sabemos por el Ejemplo 2 en la Sección 67 que la primera de las transformaciones [4] aplica el semiplano superior $y > 0$ sobre el semiplano superior $Y > 0$, donde $z = x + iy$ y $Z = X + iY$. Además, por el párrafo inmediatamente después del Ejemplo 2 de esta sección, es fácil ver que la segunda de las transformaciones [4] aplica el semiplano $Y > 0$ sobre la banda $0 < v < \pi$, donde $w = u + iv$. En consecuencia, la transformación [3] aplica el semiplano $y > 0$ sobre la banda $0 < v < \pi$. En la Figura 19 del Apéndice 2 se indican puntos frontera correspondientes.

69. LA TRANSFORMACION $w = \operatorname{sen} z$

Como (Sec. 24)

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y,$$

la transformación $w = \operatorname{sen} z$ se puede excribir

$$u = \operatorname{sen} x \cosh y, \quad v = \cos x \operatorname{senh} y. \qquad [1]$$

Los siguientes ejemplos ilustran varias propiedades de esta transformación.

Ejemplo 1. La transformación $w = \operatorname{sen} z$ es una aplicación uno a uno de la banda semiinfinita $-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2,\ y \geqq 0$ en el plano z sobre la mitad superior $v \geqq 0$ del plano w.

Para comprobarlo, probemos primero que la frontera de la franja se aplica de manera uno a uno sobre el eje real del plano w, como indica la Figura 71. La imagen del segmento recto BA se halla haciendo $x = \pi/2$ en las ecuaciones [1] y restringiendo y a valores no negativos. Como $u = \cosh y$, y $v = 0$ cuando $x = \pi/2$, un punto típico $(\pi/2, y)$ de BA se aplica sobre el punto $(\cosh y, 0)$ del plano w; y la imagen debe moverse hacia la derecha desde B' a lo largo del eje u al moverse $(\pi/2, y)$ hacia arriba partiendo de B. Un punto $(x, 0)$ sobre el segmento horizontal DB tiene imagen $(\operatorname{sen} x, 0)$, que se desplaza desde D' hacia la derecha hasta B' al crecer x desde $x = -\pi/2$ hasta $x = \pi/2$, o sea, al ir $(x, 0)$ desde D hasta B. Finalmente, mientras un punto $(-\pi/2, y)$ sobre el segmento recto DE sube desde D, su imagen $(-\cosh y, 0)$ se mueve hacia la izquierda desde D'.

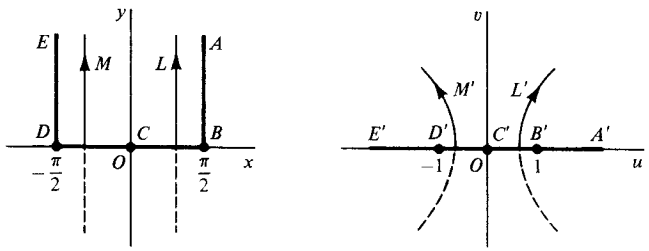


Figura 71. $w = \operatorname{sen} z$.

Una forma de ver cómo se aplica el interior de la franja sobre el semiplano superior $v > 0$ del plano w consiste en examinar las imágenes de ciertas semirrectas verticales. Si $0 < c_1 < \pi/2$, los puntos de la recta $x = c_1$ se transforman en puntos de la curva

$$u = \operatorname{sen} c_1 \cosh y, \quad v = \cos c_1 \operatorname{senh} y \qquad (-\infty < y < \infty), \qquad [2]$$

que es la rama derecha de la hipérbola

$$\frac{u^2}{\operatorname{sen}^2 c_1} - \frac{v^2}{\cos^2 c_1} = 1 \qquad [3]$$

con focos en los puntos

$$w = \pm\sqrt{\operatorname{sen}^2 c_1 + \cos^2 c_1} = \pm 1.$$

La segunda de las ecuaciones [2] muestra que al ascender un punto por la recta, su imagen sobre la hipérbola también asciende. En particular, existe una aplicación uno a uno de la mitad superior ($y > 0$) de la recta sobre la mitad superior ($v > 0$) de la rama de la hipérbola. Tal semirrecta L y su imagen L' se muestran en la Figura 71. Si $-\pi/2 < c_1 < 0$, la recta $x = c_1$ se aplica sobre la rama izquierda de la misma hipérbola; y, como antes, existe una correspondencia uno a uno entre los puntos de la mitad superior de la recta y los de la mitad superior de la rama de hipérbola. Esa semirrecta y su imagen se han denotado M y M' en la Figura 71.

La recta $x = 0$, o sea el eje y, ha de considerarse aparte. Según [1], la imagen de cada punto $(0, y)$ es $(0, \operatorname{senh} y)$. Por tanto, el eje y se aplica sobre el eje v de modo uno a uno, correspondiendo el eje y positivo al eje v positivo.

Ahora bien, cada punto en el interior $-\pi/2 < x < \pi/2$, $y > 0$ de la banda está en una de las antedichas semirrectas, y es importante hacer notar que las imágenes de esas semirrectas son distintas y llenan el semiplano $v > 0$. Más precisamente, si la mitad superior L de una recta $x = c_1$ $(0 < c_1 < \pi/2)$ se imagina en movimiento hacia la izquierda acercándose al eje y positivo, la rama derecha de la hipérbola que contiene a L' se va haciendo más amplia y su vértice $(\operatorname{sen} c_1, 0)$ tiende hacia el origen $w = 0$. Luego L' tiende a convertirse en el eje v positivo, que según vimos en el párrafo anterior es la imagen del eje y positivo. Por otra parte, al tender L al segmento BA de la frontera de la banda, la rama de hipérbola se adhiere al segmento $B'A'$ del eje u y su vértice $(\operatorname{sen} c_1, 0)$ tiende al punto $w = 1$. Afirmaciones similares pueden hacerse respecto de la semirrecta M y su imagen M' en la Figura 71. Concluimos que la imagen de todo punto en el interior de la banda está en el semiplano superior $v > 0$ y que, además, todo punto del semiplano es imagen de exactamente un punto del interior de la banda.

Esto completa nuestra demostración de que la tranformación $w = \operatorname{sen} z$ es una aplicación uno a uno de la franja $-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2$, $y \geqq 0$ sobre el semiplano $v \geqq 0$. El resultado final se recoge en la Figura 2 del Apéndice 2. La mitad derecha de la banda se aplica sobre el primer cuadrante del plano w, como indica la Figura 10, Apéndice 2.

Otra forma adecuada de hallar las imágenes de ciertas regiones bajo $w = \operatorname{sen} z$ consiste en considerar las imágenes de segmentos de recta *horizontales* $-\pi \leqq x \leqq \pi$, $y = c_2$, donde $c_2 > 0$. Según [1], la imagen de tal segmento es la curva con representación paramétrica

$$u = \operatorname{sen} x \cosh c_2, \quad v = \cos x \operatorname{senh} c_2 \qquad (-\pi \leqq x \leqq \pi). \qquad [4]$$

Se ve fácilmente que esa curva es la elipse

$$\frac{u^2}{\cosh^2 c_2} + \frac{v^2}{\operatorname{senh}^2 c_2} = 1, \qquad [5]$$

con focos en los puntos

$$w = \pm\sqrt{\cosh^2 c_2 - \operatorname{senh}^2 c_2} = \pm 1.$$

La imagen del punto (x, c_2) que se mueve hacia la derecha desde A hasta E en la Figura 72 describe un circuito alrededor de la elipse en sentido de las agujas del reloj. Nótese que si se toman valores más pequeños de c_2, la elipse se hace más pequeña pero conserva los mismos focos $(\pm 1,0)$. La elipse, en efecto, tiende hacia el intervalo $-1 \leqq u \leqq 1$ del eje u, imagen del intervalo $-\pi \leqq x \leqq \pi$ del eje x. En el caso límite $c_2 = 0$, la aplicación no es, sin embargo, uno a uno, como lo era para $c_2 > 0$.

Ahora mostraremos cómo utilizar estas observaciones.

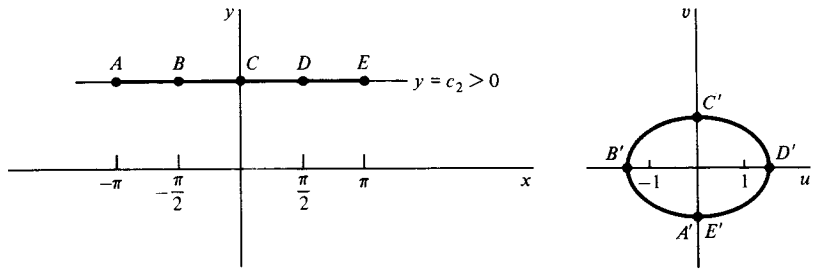


Figura 72. $w = \operatorname{sen} z$.

Ejemplo 2. Una región rectangular $-\pi \leqq x \leqq \pi$, $a \leqq y \leqq b$ situada por encima del eje x se aplica bajo $w = \operatorname{sen} z$ sobre una región limitada por dos elipses, como se ve en la Figura 73. Ambas fronteras verticales $x = \pm\pi$, $a \leqq y \leqq b$ van a parar al segmento

$$-\operatorname{senh} b \leqq v \leqq -\operatorname{senh} a$$

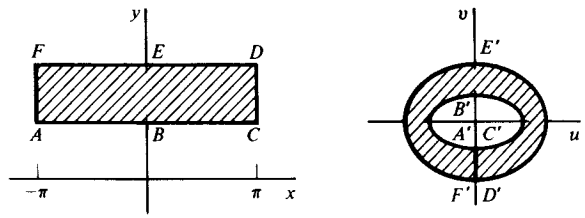


Figura 73. $w = \operatorname{sen} z$.

del eje v. El interior de la región rectangular se aplica a uno sobre el interior de un anillo elíptico que tiene un corte en el eje v negativo. Mientras un punto z describe el contorno de la región rectangular en sentido positivo desde el punto A de la Figura 73, la imagen se mueve alrededor de la elipse menor, después por el corte y por la elipse mayor, para regresar luego por el corte al punto de partida. Así pues, si bien la aplicación del interior de la región es uno a uno, no ocurre lo mismo sobre la frontera.

Aplicaciones mediante funciones relacionadas estrechamente a la función seno se obtienen fácilmente una vez conocida la del seno.

Ejemplo 3. Basta recordar la identidad (Sec. 24)

$$\cos z = \operatorname{sen}\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$$

para ver que la transformación

$$w = \cos z$$

se puede escribir sucesivamente como

$$Z = z + \frac{\pi}{2}, \quad w = \operatorname{sen} Z.$$

Luego la transformación coseno es la misma que la transformación seno precedida por una traslación de $\pi/2$ unidades a la derecha.

Ejemplo 4. De acuerdo con la Sección 25, la transformación

$$w = \operatorname{senh} z$$

admite la expresión $w = -i \operatorname{sen}(iz)$, o sea

$$Z = iz, \quad W = \operatorname{sen} Z, \quad w = -iW.$$

Es, por consiguiente, una combinación de la transformación seno y de rotaciones de ángulos rectos. La transformación

$$w = \cosh z$$

es, análogamente, en esencia una transformación coseno, ya que $\cosh z = \cos(iz)$.

EJERCICIOS

1. Probar que las rectas $ay = x$ $(a \neq 0)$ se aplican sobre espirales $\rho = \exp(a\phi)$ bajo la transformación $w = \exp z$, donde $w = \rho \exp(i\phi)$.
2. Considerando las imágenes de segmentos rectos horizontales, comprobar que la imagen de la región rectangular $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$ bajo la transformación $w = \exp z$ es la región $e^a \leqq \rho \leqq e^b$, $c \leqq \phi \leqq d$, como indica la Figura 69 (Sec. 68).
3. Verificar la aplicación de la región y del contorno de la Figura 7 del Apéndice 2, donde la transformación es $w = \exp z$.
4. Hallar la imagen de la franja semiinfinita $x \geqq 0$, $0 \leqq y \leqq \pi$ bajo la transformación $w = \exp z$, y marcar porciones correspondientes sobre las fronteras.

5. La ecuación $w = \log(z - 1)$ se puede escribir

$$Z = z - 1, \quad w = \log Z.$$

Hallar una rama de $\log Z$ tal que el plano z cortado, consistente en todos los puntos excepto los del segmento $x \geqq 1$ del eje real, se aplique bajo $w = \log(z - 1)$ sobre la banda $0 < v < 2\pi$ del plano w.

6. Probar que la transformación $w = \operatorname{sen} z$ aplica la mitad superior $(y > 0)$ de la recta $x = c_1$ $(-\pi/2 < c_1 < 0)$ uno a uno sobre la mitad superior $(v > 0)$ de la rama izquierda de la hipérbola [3], Sección 69, como muestra la Figura 71 de esa sección.
7. Demostrar que bajo la transformación $w = \operatorname{sen} z$, una recta $x = c_1$ $(\pi/2 < c_1 < \pi)$ se aplica sobre la rama derecha de la hipérbola [3], Sección 69. Nótese que la aplicación es uno a uno y que las mitades superior e inferior de la recta se aplican respectivamente sobre las mitades *inferior y superior* de la rama.
8. En el Ejemplo 1, Sección 69, se usaron semirrectas verticales para probar que la transformación $w = \operatorname{sen} z$ es una aplicación uno a uno de la región abierta $-\pi/2 < x < \pi/2$, $y > 0$, sobre el semiplano $v > 0$. Comprobar ese resultado usando ahora segmentos horizontales de recta $-\pi/2 < x < \pi/2$, $y = c_2$ $(c_2 > 0)$, cuyas imágenes son semielipses.
9. *a*) Probar que bajo la transformación $w = \operatorname{sen} z$, las imágenes de los segmentos de recta que forman la frontera de la región rectangular $0 \leqq x \leqq \pi/2$, $0 \leqq y \leqq 1$ son los segmentos rectos y el arco $D'E'$ indicados en la Figura 74. El arco $D'E'$ es una cuarta parte de la elipse

$$\frac{u^2}{\cosh^2 1} + \frac{v^2}{\operatorname{senh}^2 1} = 1.$$

b) Completar la aplicación indicada en la Figura 74 usando imágenes de segmentos rectos horizontales para demostrar que la transformación $w = \operatorname{sen} z$ establece una correspondencia uno a uno entre los puntos interiores de las regiones $ABCD$ y $A'B'C'D'$.

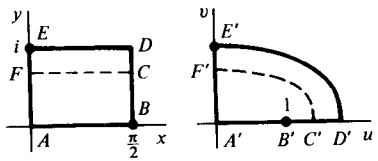


Figura 74. $w = \operatorname{sen} z$.

10. Verificar la aplicación bajo $w = \operatorname{sen} z$ que muestra la Figura 11 del Apéndice 2.
11. *a*) Probar que la ecuación $w = \cosh z$ se puede escribir

$$Z = iz + \frac{\pi}{2}, \quad w = \operatorname{sen} Z.$$

b) Usar *a*), junto con la aplicación bajo sen z que muestra la Figura 10 del Apéndice 2, para constatar que la transformación $w = \cosh z$ aplica la banda

semiinfinita $x \geqq 0$, $0 \leqq y \leqq \pi/2$ del plano z sobre el primer cuadrante $u \geqq 0$, $v \geqq 0$ del plano w. Indicar partes correspondientes de los contornos de ambas regiones.

12. Nótese que la transformación $w = \cosh z$ se puede expresar como composición de las aplicaciones

$$Z = e^z, \quad W = Z + \frac{1}{Z}, \quad w = \frac{1}{2} W.$$

Entonces, consultando las Figuras 7 y 16 del Apéndice 2, probar que cuando $w = \cosh z$, la banda semiinfinita $x \leqq 0$, $0 \leqq y \leqq \pi$ del plano z se aplica sobre la mitad inferior $v \leqq 0$ del plano w. Indicar partes correspondientes de los contornos.

13. *a*) Verificar que la ecuación $w = \operatorname{sen} z$ puede escribirse como

$$Z = i\left(z + \frac{\pi}{2}\right), \quad W = \cosh Z, \quad w = -W.$$

b) Usar el resultado en la parte *a*) de este ejercicio y la del Ejercicio 12 para demostrar que la transformación $w = \operatorname{sen} z$ aplica la banda semiinfinita $-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2$, $y \geqq 0$ sobre el semiplano $v \geqq 0$, como muestra la Figura 9 del Apéndice 2. (Esta aplicación se comprobó, de modo distinto, en el Ejemplo 1 de la Sec. 69.)

70. LA FUNCION z^2

La transformación

$$w = z^2 \qquad [1]$$

se describe más fácilmente en términos de coordenadas polares. Si $z = re^{i\theta}$ y $w = \rho e^{i\phi}$, entonces

$$\rho e^{i\phi} = r^2 e^{i2\theta}.$$

Por tanto, la imagen de cualquier punto z no nulo se halla elevando al cuadrado el módulo de z y multiplicando por dos un valor de arg z; es decir, $|w| = |z|^2$ y arg $w = 2$ arg z.

Ejemplo 1. Los puntos $z = r_0 e^{i\theta}$ del círculo $r = r_0$ se transforman en puntos $w = r_0^2 e^{i2\theta}$ del círculo $\rho = r_0^2$. Si un punto del primer círculo se mueve en sentido positivo desde el eje real positivo hasta el eje imaginario positivo, su imagen sobre el segundo círculo se mueve en sentido positivo desde el eje real positivo hasta el eje real negativo (Fig. 75). Así que si se toman todos los valores positivos posibles para r_0, los correspondientes arcos en los planos z y w llenan el primer cuadrante y el semiplano superior, respectivamente. La transformación [1] es, por tanto, una aplicación uno a uno del primer cuadrante $r \geqq 0$, $0 \leqq \theta \leqq \pi/2$

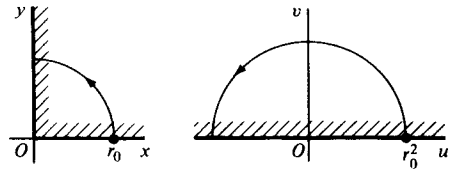


Figura 75. $w = z^2$.

del plano z sobre la mitad superior $\rho \geqq 0$, $0 \leqq \phi \leqq \pi$ del plano w como recoge la Figura 75. El punto $z = 0$ es aplicado, claro está, sobre el punto $w = 0$.

La transformación [1] también aplica el semiplano superior $r \geqq 0$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$ sobre el plano w completo. Sin embargo, en este caso la transformación no es uno a uno, ya que tanto el eje real positivo como el negativo del plano z se aplican sobre el eje real positivo del plano w.

Cuando $z = x + iy$ y $w = u + iv$, la transformación [1] se convierte en

$$u + iv = x^2 - y^2 + i2xy,$$

o sea

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy. \qquad [2]$$

Esta forma, en coordenadas rectangulares, es especialmente útil al hallar las imágenes de ciertas hipérbolas.

Ejemplo 2. Si $w = z^2$, cada rama de la hipérbola $x^2 - y^2 = c_1$ ($c_1 > 0$) se aplica de manera uno a uno sobre la recta vertical $u = c_1$. Para verlo, hacemos notar de la primera Ecuación [2] que $u = c_1$ cuando (x, y) es un punto de alguna de las ramas. Cuando, en particular, está en la rama de la derecha, la segunda de las ecuaciones [2] nos dice que $v = 2y\sqrt{y^2 + c_1}$. Luego la imagen de la rama derecha se puede expresar paramétricamente como

$$u = c_1, \quad v = 2y\sqrt{y^2 + c_1} \qquad (-\infty < y < \infty);$$

y es evidente que la imagen de un punto (x, y) de esa rama asciende por toda la recta cuando (x, y) recorre esa rama hacia arriba (Fig. 76). Análogamente, como el par de ecuaciones

$$u = c_1, \quad v = -2y\sqrt{y^2 + c_1} \qquad (-\infty < y < \infty)$$

proporciona una representación paramétrica para la imagen de la rama izquierda de la hipérbola, la imagen de un punto que *desciende* por la rama izquierda, sube a lo largo de toda la recta $u = c_1$.

Se deja como ejercicio al lector el probar que cada rama de una hipérbola $2xy = c_2$ ($c_2 > 0$) se transforma en la recta $v = c_2$, como se indica en la Figura 76. Los casos en que c_1 y c_2 son negativos se tratan también en los ejercicios.

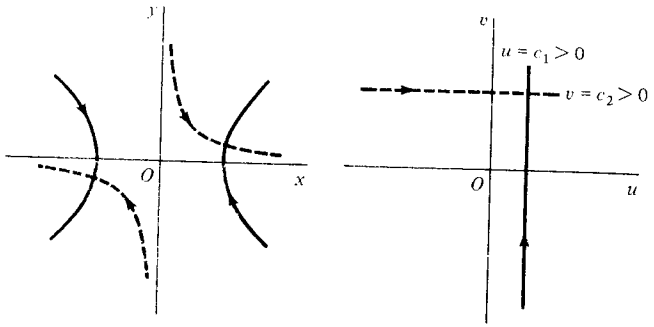


Figura 76. $w = z^2$.

Ahora ya se obtienen sin dificultad imágenes de dominios cuyos contornos contienen hipérbolas de los tipos mencionados en el Ejemplo 2.

Ejemplo 3. El dominio $x > 0$, $y > 0$, $xy < 1$ consta de todos los puntos de las ramas superiores de las hipérbolas de la familia $xy = c$, con $0 < c < 1$. La imagen del dominio cuando $w = z^2$ consiste, por tanto, en todos los puntos que están sobre las rectas $v = 2c$ $(0 < c < 1)$. Esto es, la imagen del dominio es la franja horizontal $0 < v < 2$.

Si n es un entero positivo, con $n > 2$, varias propiedades de la aplicación asociada a la transformación

$$w = z^n, \quad \text{o sea} \quad \rho e^{i\phi} = r^n e^{in\theta}, \tag{3}$$

son similares a las de $w = z^2$. La transformación [3] aplica la región $r \geqq 0$, $0 \leqq \theta \leqq \pi/n$ sobre el semiplano superior $\rho \geqq 0$, $0 \leqq \phi \leqq \pi$. También aplica todo el plano z sobre todo el plano w, donde cada punto no nulo del plano w es imagen de n puntos distintos del plano z. El círculo $r = r_0$ se aplica sobre el círculo $\rho = r_0^n$, y el sector $r \leqq r_0$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi/n$ sobre el disco $\rho \leqq r_0^n$, aunque no de modo uno a uno.

71. LA FUNCION $z^{1/2}$

Como en la Sección 7, los valores de $z^{1/2}$ son las dos raíces cuadradas de z cuando $z \neq 0$. De acuerdo con esa sección, si se usan coordenadas polares y $z = r \exp(i\Theta)$ $(r > 0, -\pi < \Theta \leqq \pi)$, entonces

$$z^{1/2} = \sqrt{r} \exp \frac{i(\Theta + 2k\pi)}{2} \qquad (k = 0, 1), \tag{1}$$

estando asociada la raíz principal al valor $k = 0$. En la Sección 27 vimos que $z^{1/2}$ se puede escribir como

$$z^{1/2} = \exp\left(\frac{1}{2} \log z\right) \qquad (z \neq 0). \tag{2}$$

La *rama principal* $F_0(z)$ de la función bivaluada $z^{1/2}$ se obtiene tomando el valor principal de log z y haciendo (véase Sec. 28)

$$F_0(z) = \exp\left(\frac{1}{2} \operatorname{Log} z\right) \qquad (|z| > 0, -\pi < \operatorname{Arg} z < \pi),$$

es decir,

$$F_0(z) = \sqrt{r} \exp \frac{i\Theta}{2} \qquad (r > 0, -\pi < \Theta < \pi). \tag{3}$$

El miembro de la derecha en esa ecuación es, por supuesto, el mismo que el de [1] cuando se toman $k = 0$ y $-\pi < \Theta < \pi$ allí. El origen y el rayo $\Theta = \pi$ forman el corte de ramificación de F_0, siendo el origen su punto de ramificación.

Las imágenes de curvas y regiones bajo la transformación $w = F_0(z)$ se pueden hallar escribiendo $w = \rho \exp(i\phi)$ con $\rho = \sqrt{r}$ y $\phi = \Theta/2$.

Ejemplo 1. La transformación $w = F_0(z)$ aplica el dominio $r > 0$, $-\pi < \Theta < \pi$ sobre la mitad derecha $\rho > 0$, $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ del plano w. En particular, aplica la región $0 < r \leqq r_0$, $-\pi < \Theta < \pi$ sobre el semidisco $0 < \rho \leqq \sqrt{r_0}$, $-\pi/2 < \phi < \pi/2$. (Véase Ej. 3, Sec. 10).

Ejemplo 2. La transformación $w = F_0(\text{sen } z)$ se puede poner como

$$Z = \text{sen } z, \quad w = F_0(Z) \qquad (|Z| > 0, -\pi < \operatorname{Arg} Z < \pi).$$

Ya se dijo al final del Ejemplo 1 en la Sección 69, que la primera transformación aplica la banda semiinfinita $0 \leqq x \leqq \pi/2$, $y \geqq 0$ sobre el primer cuadrante $X \geqq 0$, $Y \geqq 0$ del plano Z. La segunda transformación, en el supuesto de que $F_0(0) = 0$, aplica ese cuadrante sobre un octante del plano w. Estas transformaciones sucesivas se ilustran en la Figura 77, donde se muestran puntos frontera correspondientes.

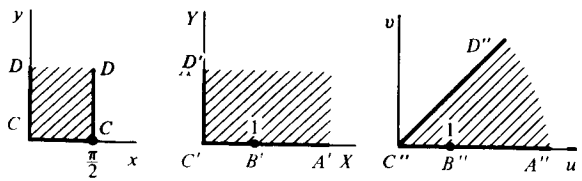


Figura 77. $w = F_0(\text{sen } z)$.

Cuando $-\pi < \Theta < \pi$ y se usa la rama

$$\log z = \ln r + i(\Theta + 2\pi)$$

de la función logaritmo, la Ecuación [2] da la rama

$$F_1(z) = \sqrt{r}\,\exp\frac{i(\Theta + 2\pi)}{2} \qquad (r > 0,\ -\pi < \Theta < \pi) \qquad [4]$$

de $z^{1/2}$, que corresponde a elegir $k = 1$ en la Ecuación [1]. Puesto que $\exp(i\pi) = -1$, se sigue que $F_1(z) = -F_0(z)$. Los valores $\pm F_0(z)$ representan, pues, la totalidad de los valores de $z^{1/2}$ en todos los puntos del dominio $r > 0$, $-\pi < \Theta < \pi$. Si por medio de la expresión [3] extendemos el dominio de definición de F_0 para que incluya el rayo $\Theta = \pi$ y hacemos $F_0(0) = 0$, entonces los valores $\pm F_0(z)$ representan la totalidad de los valores de $z^{1/2}$ en todo el plano z.

Otras ramas de $z^{1/2}$ se obtienen usando ramas distintas de $\log z$ en [2]. Una rama en la que el rayo $\theta = \alpha$ se elige como corte de ramificación viene dada por la ecuación

$$f_\alpha(z) = \sqrt{r}\,\exp\frac{i\theta}{2} \qquad (r > 0,\ \alpha < \theta < \alpha + 2\pi). \qquad [5]$$

Nótese que cuando $\alpha = -\pi$ tenemos la rama $F_0(z)$ y cuando $\alpha = \pi$ tenemos la rama $F_1(z)$. Igual que para F_0, el dominio de definición de f_α se puede extender a todo el plano complejo usando la expresión [5] para definir f_α en los puntos no nulos del corte y haciendo $f_\alpha(0) = 0$. Ahora bien, tales extensiones nunca son continuas sobre todo el plano complejo.

Finalmente, sea n un entero positivo, con $n \geqq 2$. Los valores de $z^{1/n}$ son las raíces n-ésimas de z cuando $z \neq 0$; y, por las Secciones 7 y 27, la función multivaluada $z^{1/n}$ se puede escribir

$$z^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\log z\right) = \sqrt[n]{r}\,\exp\frac{i(\Theta + 2k\pi)}{n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \quad [6]$$

donde $r = |z|$ y $\Theta = \operatorname{Arg} z$. El caso $n = 2$ se acaba de considerar. En el caso general, cada una de las n funciones

$$F_k(z) = \sqrt[n]{r}\,\exp\frac{i(\Theta + 2k\pi)}{n} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \qquad [7]$$

es una rama de $z^{1/n}$, definida sobre el dominio $r > 0$, $-\pi < \Theta < \pi$. Si $w = \rho e^{i\phi}$, la transformación $w = F_k(z)$ es una aplicación uno a uno de ese dominio sobre el dominio $\rho > 0$, $(2k-1)\pi/n < \phi < (2k+1)\pi/n$. Estas n ramas de $z^{1/n}$ producen las n raíces n-ésimas de z en cualquier punto z del dominio $r > 0$, $-\pi < \Theta < \pi$. La rama principal se obtiene con $k = 0$, y otras ramas del tipo [5] se construyen fácilmente.

72. RAICES CUADRADAS DE POLINOMIOS

Consideraremos ahora algunas aplicaciones que son composiciones de polinomios y raíces cuadradas de z.

Ejemplo 1. Se obtienen las ramas de la función bivaluada $(z - z_0)^{1/2}$ teniendo en cuenta que es una composición de la traslación $Z = z - z_0$ con la función bivaluada $Z^{1/2}$. Cada rama de $Z^{1/2}$ produce una rama de $(z - z_0)^{1/2}$. Si $Z = Re^{i\theta}$, las ramas de $Z^{1/2}$ son

$$Z^{1/2} = \sqrt{R}\,\exp\frac{i\theta}{2} \qquad (R > 0,\ \alpha < \theta < \alpha + 2\pi).$$

En consecuencia, si llamamos $R = |z - z_0|$, $\theta = \arg(z - z_0)$, y $\Theta = \operatorname{Arg}(z - z_0)$, dos ramas de $(z - z_0)^{1/2}$ son

$$G_0(z) = \sqrt{R}\,\exp\frac{i\Theta}{2} \qquad (R > 0,\ -\pi < \Theta < \pi) \qquad [1]$$

y

$$g_0(z) = \sqrt{R}\,\exp\frac{i\theta}{2} \qquad (R > 0,\ 0 < \theta < 2\pi). \qquad [2]$$

La rama de $Z^{1/2}$ usada al escribir $G_0(z)$ está definida en todos los puntos del plano Z excepto en el origen y en los puntos del rayo $\operatorname{Arg} Z = \pi$. La transformación $w = G_0(z)$ es, por tanto, una aplicación uno a uno del dominio $|z - z_0| > 0$, $-\pi < \operatorname{Arg}(z - z_0) < \pi$ sobre el semiplano $w > 0$ (Fig. 78). La transformación $w = g_0(z)$ aplica el dominio $|z - z_0| > 0$, $0 < \arg(z - z_0) < 2\pi$ de manera uno a uno sobre el semiplano superior $\operatorname{Im} w > 0$.

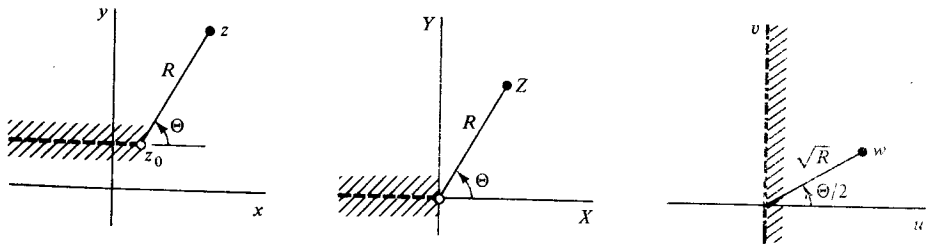


Figura 78. $w = G_0(z)$.

Ejemplo 2. Como ejemplo instructivo, pero menos elemental, consideremos ahora la función bivaluada $(z^2 - 1)^{1/2}$. Usando propiedades ya conocidas de los logaritmos, escribimos

$$(z^2 - 1)^{1/2} = \exp\left[\frac{1}{2}\log(z^2 - 1)\right] = \exp\left[\frac{1}{2}\log(z - 1) + \frac{1}{2}\log(z + 1)\right],$$

o sea

$$(z^2 - 1)^{1/2} = (z - 1)^{1/2}(z + 1)^{1/2} \qquad (z \neq \pm 1) \qquad [3]$$

Así pues, si $f_1(z)$ es una rama de $(z-1)^{1/2}$ definida sobre un dominio D_1 y $f_2(z)$ es una rama de $(z+1)^{1/2}$ definida sobre un dominio D_2, el producto $f = f_1 f_2$ es una rama de $(z-1)^{1/2}$ definida en todos los puntos comunes a D_1 y D_2.

Con objeto de conseguir una rama específica de $(z^2-1)^{1/2}$, usamos la rama de $(z-1)^{1/2}$ y de $(z+1)^{1/2}$ dadas por la Ecuación [2]. Si llamamos $r_1 = |z-1|$ y $\theta_1 = \arg(z-1)$, esa rama de $(z-1)^{1/2}$ es

$$f_1(z) = \sqrt{r_1}\exp\frac{i\theta_1}{2} \qquad (r_1 > 0,\ 0 < \theta_1 < 2\pi).$$

La rama de $(z+1)^{1/2}$ dada por la Ecuación [2] es

$$f_2(z) = \sqrt{r_2}\exp\frac{i\theta_2}{2} \qquad (r_2 > 0,\ 0 < \theta_2 < 2\pi),$$

donde $r_2 = |z+1|$ y $\theta_2 = \arg(z+1)$. El producto de esas dos ramas es, por consiguiente, la rama f de $(z^2-1)^{1/2}$ definida por la ecuación

$$f(z) = \sqrt{r_1 r_2}\exp\frac{i(\theta_1+\theta_2)}{2}, \qquad [4]$$

donde

$$r_k > 0, \quad 0 < \theta_k < 2\pi \qquad (k = 1, 2).$$

Tal como ilustra la Figura 79, la rama f está definida en todo el plano z, excepto sobre el rayo $r_2 \geqq 0$, $\theta_2 = 0$, que es la porción $x \geqq -1$ del eje x.

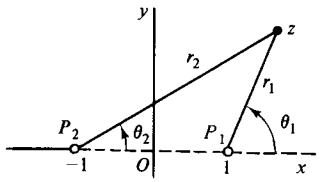


Figura 79

La rama f de $(z^2-1)^{1/2}$ dada en [4] admite extensión a una función

$$F(z) = \sqrt{r_1 r_2}\exp\frac{i(\theta_1+\theta_2)}{2}, \qquad [5]$$

donde

$$r_k > 0, \quad 0 \leqq \theta_k < 2\pi \qquad (k = 1, 2) \quad \text{y} \quad r_1 + r_2 > 2.$$

Como veremos ahora, esta función es analítica en todo su dominio de definición, que es todo el plano complejo z, salvo el segmento $-1 \leqq x \leqq 1$ del eje x.

Como $F(z) = f(z)$ para todo z del dominio de definición de F, excepto en el rayo $r_1 > 0$, $\theta_1 = 0$, basta ver que F es analítica en ese rayo. Para ello, formamos el producto de las ramas de $(z-1)^{1/2}$ y $(z+1)^{1/2}$ dadas por [1]. Es decir, consideramos la función

$$G(z) = \sqrt{r_1 r_2}\exp\frac{i(\Theta_1+\Theta_2)}{2},$$

donde $r_1 = |z-1|$, $r_2 = |z+1|$, $\Theta_1 = \operatorname{Arg}(z-1)$, $\Theta_2 = \operatorname{Arg}(z+1)$ y

$$r_k > 0, \quad -\pi < \Theta_k < \pi \qquad (k = 1, 2).$$

G es analítica en todo el plano z, excepto en el rayo $r_1 \geqq 0$, $\Theta_1 = \pi$. Ahora bien, $F(z) = G(z)$ cuando z está por encima de o en el rayo $r_1 > 0$, $\Theta_1 = 0$; porque entonces $\theta_k = \Theta_k$ $(k = 1, 2$. Si z está por debajo de ese rayo, $\theta_k = \Theta_k + 2\pi$ $(k = = 1, 2)$. Luego $\exp(i\theta_k/2) = -\exp(i\Theta_k/2)$; lo cual significa que

$$\exp\frac{i(\theta_1+\theta_2)}{2} = \left(\exp\frac{i\theta_1}{2}\right)\left(\exp\frac{i\theta_2}{2}\right) = \exp\frac{i(\Theta_1+\Theta_2)}{2}.$$

Así que, de nuevo, $F(z) = G(z)$. Ya que $F(z) = G(z)$ en un dominio que contiene al rayo $r_1 > 0$, $\Theta_1 = 0$, y siendo G analítica en ese dominio, F es analítica allí. Por tanto, *F es analítica en todas partes, salvo en el segmento P_2P_1 de la Figura 79.*

La función F definida en [5] no admite extensión a una función armónica en los puntos del segmento P_2P_1, porque los valores de la derecha en la Ecuación [5] saltan desde $i\sqrt{r_1 r_2}$ hasta números próximos a $-i\sqrt{r_1 r_2}$, cuando el punto z se mueve hacia abajo cruzando ese segmento recto. De modo que la extensión no sería continua allí.

La transformación $w = F(z)$ es, como veremos, una aplicación uno a uno del dominio D_z consistente en todo el plano z, salvo el segmento P_2P_1, sobre el dominio D_w consistente en todo el plano w, salvo el segmento $-1 \leqq v \leqq 1$ del eje v (Fig. 80).

Antes de comprobar eso, observemos que si $z = iy$ $(y > 0)$, entonces $r_1 = r_1\ r_1 > 1$ y $\theta_1 + \theta_2 = \pi$; luego el eje y positivo se aplica bajo $w = F(z)$ sobre la parte $v > 1$ del eje v. Además, el eje y negativo se aplica sobre la parte $v < -1$ del eje v. Cada punto de la mitad superior $y > 0$ del dominio D_z se aplica en la parte superior $v > 0$ del plano w, y cada punto de la mitad inferior $y < 0$ del dominio D_z en la mitad inferior $v < 0$ del plano w. El rayo $r_1 > 0$, $\theta_1 = 0$ se aplica sobre el eje real positivo del plano w, y el rayo $r_1 > 0$, $\theta_2 = \pi$ sobre el eje real negativo.

Para demostrar que la transformación $w = F(z)$ es *uno a uno*, hagamos notar que si $F(z_1) = F(z_2)$, entonces $z_1^2 - 1 = z_2^2 - 1$. De donde se deduce que $z_1 = z_2$ o $z_1 = -z_2$. Sin embargo, debido a la manera en que F aplica las mitades superior e inferior de D_z, así como las porciones del eje real que están en D_z, el

caso $z_1 = -z_2$ es imposible. Luego si $F(z_1) = F(z_2)$, entonces $z_1 = z_2$, *así que* F es uno a uno.

Podemos demostrar que F aplica D_z *sobre* D_w hallando una función H que aplique D_w sobre D_z con la propiedad de que si $z = H(w)$ entonces $w = F(z)$. Eso probará que para todo w en D_w existe un punto z en D_z tal que $F(z) = w$; esto es, la aplicación F es suprayectiva (sobre). La aplicación H será la inversa de F.

Para hallar H, notemos que si w es un valor de $(z^2 - 1)^{1/2}$ para un z concreto, entonces $w^2 = z^2 - 1$ y, por tanto, z es un valor de $(w^2 + 1)^{1/2}$ para ese w. La función H será una rama de la función bivaluada

$$(w^2 + 1)^{1/2} = (w - i)^{1/2}(w + i)^{1/2} \qquad (w \neq \pm i).$$

Siguiendo nuestro procedimiento para obtener la función $F(z)$, escribimos $w - i = \rho_1 \exp(i\phi_1)$ y $w + i = \rho_2 \exp(i\phi_2)$. (Véase Fig. 80.) Con las restricciones

$$\rho_k > 0, \quad \frac{-\pi}{2} \leqq \phi_k < \frac{3\pi}{2} \qquad (k = 1, 2) \quad \text{y} \quad \rho_1 + \rho_2 > 2,$$

tenemos

$$H(w) = \sqrt{\rho_1 \rho_2}\, \exp \frac{i(\phi_1 + \phi_2)}{2}, \qquad [6]$$

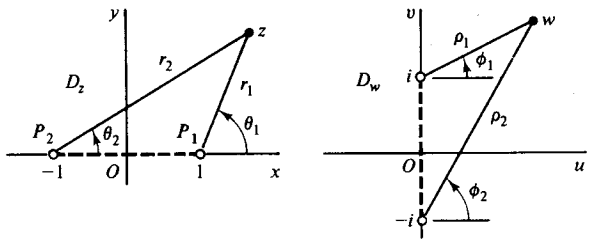


Figura 80. $w = F(z)$.

siendo D_w el dominio de definición. La transformación $z = H(w)$ aplica puntos de D_w que están por encima o por debajo del eje u sobre puntos que están por encima o por debajo del eje x, respectivamente. Aplica el eje u positivo en la parte $x > 1$ del eje x, y el eje u negativo en la parte $x < -1$ del eje x. Si $z = H(w)$, entonces $z^2 = w^2 + 1$, luego $w^2 = z^2 - 1$. Como z está en D_z y dado que $F(z)$ y $-F(z)$ son los dos valores de $(z^2 - 1)^{1/2}$ para un punto de D_z, vemos que $w = F(z)$ o $w = -F(z)$. Pero es evidente por la forma en que F y H aplican las mitades superior e inferior de sus dominios de definición, incluidas las partes de los ejes reales en ellos contenidas, que $w = F(z)$.

Aplicaciones mediante ramas de funciones bivaluadas

$$w = (z^2 + Az + B)^{1/2} = [(z - z_0)^2 - z_1^2]^{1/2} \qquad (z_1 \neq 0), \qquad [7]$$

donde $A = -2z_0$ y $B = z_0^2 - z_1^2$, se pueden estudiar con ayuda de los resultados obtenidos para la función F del Ejemplo 2 y las transformaciones sucesivas

$$Z = \frac{z - z_0}{z_1}, \quad W = (Z^2 - 1)^{1/2}, \quad w = z_1 W. \qquad [8]$$

EJERCICIOS

1. Probar que cada rama de hipérbola $2xy = c_2$ $(c_2 > 0)$ se aplica bajo la transformación $w = z^2$ en la recta $v = c_2$, como indica la Figura 76, Sección 70.

2. En referencia al Ejemplo 2, Sección 70, y al Ejercicio 1, hallar un dominio del plano z cuya imagen bajo la transformación $w = z^2$ sea el dominio cuadrado del plano w limitado por las rectas $u = 1$, $u = 2$, $v = 1$ y $v = 2$. (Véase Fig. 2 del Apéndice 2).

3. Hallar y dibujar, mostrando las orientaciones correspondientes, las imágenes de las hipérbolas $x^2 - y^2 = c_1$ $(c_1 < 0)$ y $2xy = c_2$ $(c_2 < 0)$ bajo la transformación $w = z^2$.

4. Demostrar, indicando las orientaciones correspondientes, que la aplicación $w = z^2$ transforma las rectas $y = c_2$ $(c_2 > 0)$ en parábolas $v^2 = 4c_2^2(u + c_2^2)$, todas con focos en $w = 0$. (Comparar con el Ej. 1 de la Sec. 10.)

5. Usar el resultado del ejercicio anterior para probar que $w = z^2$ es una aplicación uno a uno de una banda $a \leqq y \leqq b$ por encima del eje x, sobre la región cerrada contenida entre las parábolas

$$v^2 = 4a^2(u + a^2), \qquad v^2 = 4b^2(u + b^2).$$

6. Refiriéndonos a la Figura 10 del Apéndice 2, probar que la transformación $w = \text{sen}^2 z$ aplica la franja $0 \leqq x \leqq \pi/2$, $y \geqq 0$ sobre el semiplano $v \geqq 0$. Indicar partes correspondientes en los contornos.

7. Usar la Figura 9 del Apéndice 2 para demostrar que bajo la transformación $w = (\text{sen } z)^{1/4}$, donde se toma la rama principal de la potencia racional, la banda semiinfinita $-\pi/2 < x < \pi/2$, $y > 0$, se aplica sobre la parte del primer cuadrante que queda entre la recta $v = u$ y el eje u. Señalar partes correspondientes sobre los contornos.

8. Según el Ejemplo 2, Sección 67, la transformación racional lineal $Z = (z - 1)/(z + 1)$ aplica el eje x sobre el eje X y los semiplanos $y > 0$ e $y < 0$ sobre los semiplanos $Y > 0$ e $Y < 0$, respectivamente. Probar que, en particular, aplica el segmento $-1 \leqq x \leqq 1$ del eje x sobre el segmento $X \leqq 0$ del eje X. Demostrar entonces que cuando se usa la rama principal de la raíz cuadrada, la función compuesta

$$w = Z^{1/2} = \left(\frac{z - 1}{z + 1}\right)^{1/2}$$

aplica el plano z, excepto el segmento $-1 \leqq x \leqq 1$ del eje x, sobre el semiplano $u > 0$.

9. Hallar la imagen del dominio $r > 0$, $-\pi < \Theta < \pi$ del plano z bajo cada una de las transformaciones $w = F_k(z)$ $(k = 0, 1, 2, 3)$, donde $F_k(z)$ son las cuatro ramas de $z^{1/4}$ dadas por la Ecuación [7], Sección 71, para $n = 4$. Usar esas ramas para calcular las raíces cuartas de i.

10. La rama F de $(z^2 - 1)^{1/2}$ en el Ejemplo 2, Sección 72, se definió en términos de las coordenadas r_1, r_2, θ_1, θ_2. Explicar geométricamente por qué las condiciones $r_1 > 0$, $0 < \theta_1 + \theta_2 < \pi$ describen el cuadrante $x > 0$, $y > 0$ del plano z. A continuación, demostrar que la transformación $w = F(z)$ aplica ese cuadrante sobre el cuadrante $u > 0$, $v > 0$ del plano w.

Sugerencia: Para ver que se describe el cuadrante $x > 0$, $y > 0$ del plano z, nótese que $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ en cada punto del eje y positivo, y que $\theta_1 + \theta_2$ decrece al moverse el punto z hacia la derecha por un rayo $\theta_2 = c$ $(0 < c < \pi/2)$.

11. Para la transformación $w = F(z)$ del primer cuadrante del plano z sobre el primer cuadrante del plano w (Ejerc. 10), probar que

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{r_1 r_2 + x^2 - y^2 - 1} \quad \text{y} \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{r_1 r_2 - x^2 + y^2 + 1},$$

donde $r_1^2 r_2^2 = (x^2 + y^2 + 1)^2 - 4x^2$, y que la imagen de la porción de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ en el primer cuadrante es el rayo $v = u$ $(u > 0)$.

12. Probar que en el Ejercicio 11 el dominio D que está bajo la hipérbola y en el primer cuadrante del plano z queda descrito por las condiciones $r_1 > 0$, $0 < \theta_1 + \theta_2 < < \pi/2$. Probar entonces que la imagen de D es el octante $0 < v < u$. Representar D y su imagen.

13. Sea F la rama de $(z^2 - 1)^{1/2}$ definida en el Ejemplo 2, Sección 72, y sea $z_0 = r_0 \exp(i\theta_0)$ con $r_0 > 0$ y $0 \leqq \theta_0 \leqq 2\pi$. Probar que una rama F_0 de $(z^2 - z_0^2)^{1/2}$, cuyo corte de ramificación sea el segmento recto entre z_0 y $-z_0$, se puede escribir como $F_0(z) = z_0 F(Z)$, donde $Z = z/z_0$.

14. Escribamos $z - 1 = r_1 \exp(i\theta_1)$ y $z + 1 = r_2 \exp(i\Theta_2)$, con $0 < \theta_1 < 2\pi$ y $-\pi < < \Theta_2 < \pi$. para definir una rama de la función:

a) $(z^2 - 1)^{1/2}$; *b)* $\left(\dfrac{z - 1}{z + 1}\right)^{1/2}$.

En cada caso, el corte ha de consistir en los dos rayos $\theta_1 = 0$ y $\Theta_2 = \pi$.

15. Con la notación de la Sección 72, probar que la función

$$w = \left(\frac{z - 1}{z + 1}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \exp\frac{i(\theta_1 - \theta_2)}{2}$$

es una rama con el mismo dominio de definición D_z y el mismo corte que la función $w = F(z)$ de esa sección. Demostrar que esta transformación aplica D_z sobre el semiplano derecho $\rho > 0$, $-\pi/2 < \phi < \pi/2$, donde el punto $w = 1$ es la imagen del punto $z = \infty$. Además, probar que la transformación inversa es

$$z = \frac{1 + w^2}{1 - w^2} \qquad (\text{Re } w > 0).$$

(Comparar con el Ejerc. 8.)

16. Probar que la transformación del ejercicio anterior aplica la región exterior al círculo unidad $|z| = 1$ en el semiplano superior del plano z, sobre la región del primer cuadrante del plano w entre la recta $v = u$ y el eje u. Esbozar ambas regiones.

17. Escribir $z = r \exp(i\Theta)$, $z - 1 = r_1 \exp(i\Theta_1)$, y $z + 1 = r_2 \exp(i\Theta_2)$, donde los valores de los tres ángulos están entre $-\pi$ y π. Definir entonces una rama de la función $[z(z^2 - 1)]^{1/2}$ cuyo corte conste de los dos segmentos $x \leqq -1$ y $0 \leqq x \leqq 1$ del eje x.

CAPITULO

OCHO

TRANSFORMACIONES CONFORMES

En este capítulo introducimos y desarrollamos la noción de transformación conforme, con énfasis en las conexiones entre tales aplicaciones y las funciones armónicas. En el próximo capítulo analizaremos su utilización en problemas físicos.

73. CONSERVACION DE ANGULOS

Sea C un arco suave (Sec. 31) representado por la ecuación $z = z(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$, y sea $f(z)$ una función definida en todos los puntos de C. La ecuación $w = f[z(t)]$ $(a \leqq t \leqq b)$ es una representación paramétrica de la imagen Γ de C bajo la transformación $w = f(z)$.

Supongamos que C pasa por un punto $z_0 = z(t_0)$ $(a \leqq t_0 \leqq b)$ en el que f es analítica y $f'(z_0) \neq 0$. Por la regla de la cadena dada en el Ejercicio 10, Sección 31, si $w(t) = f[z(t)]$, entonces

$$w'(t_0) = f'[z(t_0)]z'(t_0); \qquad [1]$$

y eso significa que (véase Sec. 5)

$$\arg w'(t_0) = \arg f'[z(t_0)] + \arg z'(t_0). \qquad [2]$$

La Ecuación [2] es útil para relacionar las direcciones de C y Γ en los puntos z_0 y $w_0 = f(z_0)$, respectivamente.

Concretamente, sea ψ_0 el valor de $\arg f'(z_0)$, y sea θ_0 el ángulo de inclinación de una recta dirigida tangente a C en z_0 (Fig. 81). De acuerdo con la Sec. 31, θ_0 es un valor de $\arg z'(t_0)$, y se sigue de la Ecuación [2] que la cantidad

$$\phi_0 = \psi_0 + \theta_0$$

es un valor de $\arg w'(t_0)$ y es, por tanto, el ángulo de inclinación de una recta dirigida tangente a Γ en el punto $w_0 = f(z_0)$. Por lo tanto, el ángulo de inclinación de la recta en w_0 difiere del ángulo de inclinación de la z_0 por el ángulo de rotación.

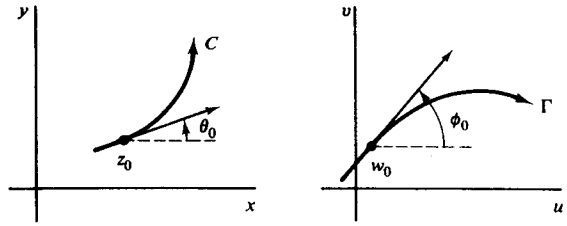


Figura 81. $\phi_0 = \psi_0 + \theta_0$.

$$\psi_0 = \arg f'(z_0). \qquad [3]$$

Sean ahora C_1 y C_2 dos arcos suaves que pasan por z_0, y sean θ_1, θ_2 los ángulos de inclinación de sus respectivas rectas tangentes dirigidas en z_0. Sabemos por el párrafo anterior que las cantidades

$$\phi_1 = \psi_0 + \theta_1 \quad \text{y} \quad \phi_2 = \psi_0 + \theta_2$$

son ángulos de inclinación de rectas dirigidas tangentes a las curvas imagen Γ_1 y Γ_2, respectivamente, en el punto $w_0 = f(z_0)$. Así que $\phi_2 - \phi_1 = \theta_2 - \theta_1$; esto es, el ángulo $\phi_2 - \phi_1$ desde Γ_1 hasta Γ_2 es el mismo en *magnitud* y *sentido* que el ángulo $\theta_2 - \theta_1$ desde C_1 hasta C_2. Esos ángulos se han denotado por α en la Figura 82.

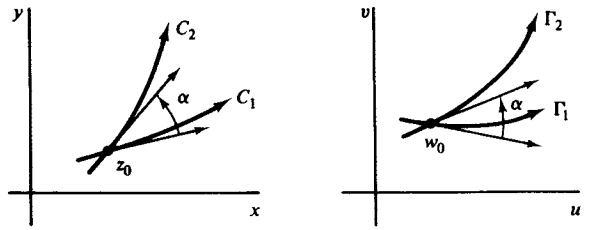


Figura 82

A causa de esta propiedad de conservar ángulos, una transformación $w = f(z)$ se llama *conforme* en un punto z_0 si f es analítica en él y $f'(z_0) \neq 0$. Tal transformación es conforme, de hecho, en un entorno de z_0, porque f es necesariamente analítica en un entorno de z_0 (Sec. 20), y al ser f' continua en z_0 (Sec. 40) se deduce de la Sección 14 que existe un entorno de ese punto en el que $f'(z) \neq 0$.

Una transformación $w = f(z)$, definida en un dominio D, se llama transformación conforme, o *aplicación conforme*, si es conforme en todo punto de D. Es decir, f es conforme en D si es analítica en D y su derivada no tiene ceros en D.

Cada una de las funciones elementales estudiadas en el Capítulo 3 se puede usar para definir una transformación conforme en cierto dominio.

Ejemplo 1. La aplicación $w = e^z$ es conforme en todo el plano z porque $d(e^z)/dz = e^z \neq 0$ para todo z. Consideremos dos rectas arbitrarias $x = c_1$, $y = c_2$, en el plano z, la primera dirigida hacia arriba y la segunda hacia la derecha. Según la Sección 68, sus imágenes bajo $w = e^z$ son un círculo orientado positivamente centrado en el origen y un rayo que arranca del origen, respectivamente. Como ilustra la Figura 68 (Sec. 68), el ángulo entre las rectas en su punto de intersección es un ángulo recto en la dirección negativa, y lo mismo es cierto para el ángulo que forman el círculo y el rayo en el punto correspondiente del plano w. El carácter conforme de la aplicación $w = e^z$ queda ilustrado asimismo por las Figuras 7 y 8 del Apéndice 2.

Ejemplo 2. Consideremos dos arcos suaves que son curvas de nivel $u(x, y) = c_1$ y $v(x, y) = c_2$ de las componentes real e imaginaria de una función

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

y supongamos que se cortan en un punto z_0 en el que f es analítica y $f'(z_0) \neq 0$. La transformación $w = f(z)$ es conforme en z_0 y aplica esos arcos en las rectas $u = c_1$ y $v = c_2$, que son ortogonales en el punto $w_0 = f(z_0)$. Por la teoría expuesta, los arcos han de ser ortogonales en z_0. Esto ya ha sido verificado e ilustrado en los Ejercicios 12 a 16 de la Sección 21.

Una aplicación que conserva la magnitud del ángulo entre arcos suaves pero no necesariamente el sentido se llama una *aplicación isogonal.*

Ejemplo 3. La transformación $w = \bar{z}$, que es una reflexión en el eje real, es isogonal pero no conforme. Si va seguida por una transformación conforme, la transformación resultante $w = f(\bar{z})$ es también isogonal pero no conforme.

Sea f una función no constante y supongamos que f es analítica en z_0. Si $f'(z_0) = 0$, entonces z_0 se llama un *punto crítico* de la transformación $w = f(z)$.

Ejemplo 4. El punto $z = 0$ es un punto crítico de la transformación $w = 1 + z^2$, que es una composición de las aplicaciones $Z = z^2$ y $w = 1 + Z$. Un rayo $\theta = \alpha$ que parte del punto $z = 0$ es obviamente transformado en el rayo que arranca del punto $w = 1$ con ángulo de inclinación 2α. Además, el ángulo entre cualesquiera dos rayos trazados desde el punto crítico $z = 0$ se duplica bajo la transformación.

Más en general, se puede probar que si z_0 es un punto crítico de una transformación $w = f(z)$, existe un entero m ($m \geq 2$) tal que el ángulo entre cualquier par de arcos que pasen por z_0 queda multiplicado por m bajo la transformación. El entero m es el menor entero positivo tal que $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Dejamos como ejercicio la comprobación de estos asertos.

74. OTRAS PROPIEDADES

Otra propiedad de una transformación $w = f(z)$ que es conforme en el punto z_0 se obtiene considerando el módulo de $f'(z_0)$. De la definición de derivada y la propiedad [8], Sección 12, de los límites, se sigue que

$$|f'(z_0)| = \left| \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| = \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}. \qquad [1]$$

Ahora bien, $|z - z_0|$ es la longitud de un segmento recto que une z_0 con z, y $|f(z) - f(z_0)|$ es la longitud de un segmento de recta que une $f(z_0)$ con $f(z)$ en el plano w. Es evidente que si z está cerca del punto z_0, la razón

$$\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}$$

de las dos longitudes es aproximadamente el número $|f'(z_0)|$. Nótese que $|f'(z_0)|$ representa una dilatación si es mayor que 1 y una contracción si es menor que 1.

Aunque el ángulo de rotación $\arg f'(z)$(Sec. 73) y el *factor de escala* $|f'(z)|$ varían en general punto a punto, de la continuidad de f' concluimos que sus valores son aproximadamente $\arg f'(z_0)$ y $|f'(z_0)|$ en puntos z próximos a z_0. Luego la imagen de una pequeña región en un entorno de z_0 es *conforme* con la región original en el sentido de que tiene aproximadamente la misma forma. Sin embargo, una región grande puede transformarse en una región que no guarda parecido con la original.

Ejemplo 1. Para $f(z) = z^2$, la transformación

$$w = f(z) = x^2 - y^2 + i2xy$$

es conforme en el punto $z = 1 + i$, donde las semirrectas $y = x$ ($y \geq 0$) y $x = 1$ ($y \geq 0$) intersectan. Denotemos esas semirrectas por C_1 y C_2, con sentido positivo hacia arriba, y observemos que el ángulo desde C_1 hasta C_2 es $\pi/4$ en su punto de intersección (Fig. 83). Como la imagen de un punto (x, y) del plano z es un punto del plano w cuyas coordenadas rectangulares son

$$u = x^2 - y^2 \quad \text{y} \quad v = 2xy,$$

la semirrecta C_1 se transforma en la curva Γ_1 con representación paramétrica

$$u = 0, \quad v = 2y^2 \qquad (0 \leq y < \infty). \qquad [2]$$

Así pues, Γ_1 es la mitad superior $v \geq 0$ del eje v. La semirrecta C_2 se transforma en la curva Γ_2 representada por las ecuaciones

$$u = 1 - y^2, \quad v = 2y \qquad (0 \leq y \leq \infty). \qquad [3]$$

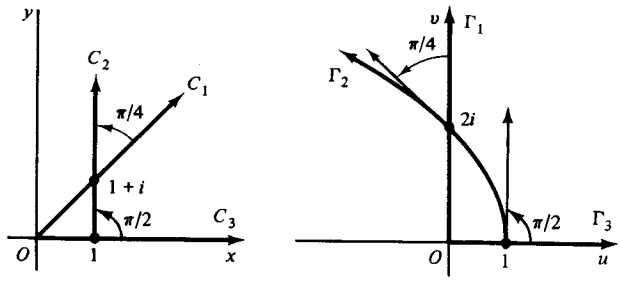


Figura 83. $w = z^2$.

Por tanto, C_2 es la mitad superior de la parábola $v^2 = -4(u - 1)$. En cada caso, el sentido positivo de la curva imagen es hacia arriba.

Si u y v son las variables en la representación [3] de la curva imagen Γ_2, entonces

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv/dy}{du/dy} = \frac{2}{-2y} = -\frac{2}{v}.$$

En particular, $dv/du = -1$ cuando $v = 2$. En consecuencia, el ángulo desde la curva imagen Γ_1 hasta la curva imagen Γ_2 en el punto $w = f(1 + i) = 2i$ es $\pi/4$, como requiere el carácter conforme de la aplicación. Tal como se ha anticipado, el ángulo de rotación $\pi/4$ en el punto $z = 1 + i$ es un valor de

$$\arg[f'(1 + i)] = \arg[2(1 + i)] = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

El factor de escala en ese punto es el número

$$|f'(1 + i)| = |2(1 + i)| = 2\sqrt{2}.$$

Para poner de manifiesto cómo el ángulo de rotación y el factor de escala pueden cambiar punto a punto, notemos que son 0 y 2, respectivamente, en el punto $z = 1$, ya que $f'(1) = 2$. Véase la Figura 83, donde las curvas C_2 y Γ_2 son las mismas de antes y donde el eje x no negativo C_3 se transforma en el eje u no negativo Γ_3.

Una transformación $w = f(z)$ que sea conforme en el punto z_0 tiene una inversa local allí. Esto es, si $w_0 = f(z_0)$, entonces existe una única transformación $z = g(w)$, definida y analítica en un entorno N de w_0, tal que $g(w_0) = z_0$ y $f[g(w)] = w$ para todo punto w en N. La derivada de g es, de hecho,

$$g'(w) = \frac{1}{f'(z)}. \qquad [4]$$

Hagamos notar de la expresión [4] que la transformación $z = g(w)$ es también conforme en w_0.

Comprobemos la existencia de tal inversa, que es consecuencia directa de resultados del cálculo avanzado*. Como se hizo notar en la Sección 73, el que la transformación $w = f(z)$ sea conforme en z_0 implica que hay un entorno de z_0 donde la transformación es conforme y, en consecuencia, f analítica. Por tanto, si escribimos $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, y

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

sabemos que existe un entorno del punto (x_0, y_0) en el que las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$, junto con sus derivadas parciales de todo orden, son continuas (Sec. 40).

Ahora bien, el par de ecuaciones

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \qquad [5]$$

representa una transformación del entorno mencionado en el plano uv. Además, el determinante

$$J = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - v_x u_y,$$

que se conoce como *jacobiano* de la transformación, es no nulo en el punto (x_0, y_0). Porque, en vista de las ecuaciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$, podemos escribir J como

$$J = (u_x)^2 + (v_x)^2 = |f'(z)|^2;$$

y $f'(z_0) \neq 0$, ya que la transformación $w = f(z)$ es conforme en z_0. Las anteriores condiciones de continuidad sobre las funciones u, v y sus derivadas, junto con esa condición sobre el jacobiano, son suficientes para asegurar la existencia de una inversa local de la transformación [5] en (x_0, y_0). Esto es, si

$$u_0 = u(x_0, y_0) \quad \text{y} \quad v_0 = v(x_0, y_0), \qquad [6]$$

entonces existe una única transformación continua

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \qquad [7]$$

definida sobre un entorno N del punto (u_0, v_0) que aplica ese punto sobre (x_0, y_0), tal que las ecuaciones [5] son válidas cuando se cumplen las ecuaciones [7]. Asimismo, aparte de ser continuas, las funciones [7] tienen derivadas parciales continuas de primer orden que satisfacen

$$x_u = \frac{1}{J} v_y, \quad x_v = -\frac{1}{J} u_y, \quad y_u = -\frac{1}{J} v_x, \quad y_v = \frac{1}{J} u_x \qquad [8]$$

sobre N.

* Los resultados de cálculo avanzado que vamos a usar aquí aparecen, por ejemplo, en *Advanced Calculus*, 3.ª ed., pp. 241-247, de A. E. Taylor y W. R. Mann.

Si hacemos $w = u + iv$, $w_0 = u_0 + iv_0$, y

$$g(w) = x(u, v) + iy(u, v), \qquad [9]$$

la transformación $z = g(w)$ es evidentemente la inversa local de la transformación $w = f(z)$ en z_0. Las transformaciones [5] y [7] se pueden escribir

$$u + iv = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{y} \quad x + iy = x(u, v) + iy(u, v);$$

y estas dos últimas ecuaciones son lo mismo que

$$w = f(z) \quad \text{y} \quad z = g(w),$$

donde g tiene las propiedades deseadas. Las ecuaciones [8] pueden usarse para demostrar que g es analítica en N. Relegamos los detalles a los ejercicios, en los que se deducirá la expresión [4] para $g'(w)$.

Ejemplo 2. Si $f(z) = e^z$, la transformación $w = f(z)$ es conforme en todo el plano z y, en particular, en el punto $z = 2\pi i$. La imagen de z_0 es el punto $w_0 = 1$. Si se expresan los puntos del plano w como $w = \rho e^{i\phi}$, la inversa local en z_0 se obtiene escribiendo $g(w) = \log w$, donde $\log w$ denota la rama

$$\log w = \ln \rho + i\phi \qquad (\rho > 0, \pi < \phi < 3\pi)$$

de la función logaritmo, restringida a cualquier entorno de w_0 que no contenga al origen. Obsérvese que

$$g(1) = \ln 1 + i2\pi = 2\pi i$$

y que, si w está en ese entorno,

$$f[g(w)] = \exp(\log w) = w.$$

Asimismo,

$$g'(w) = \frac{d}{dw} \log w = \frac{1}{w} = \frac{1}{\exp z},$$

de acuerdo con la Ecuación [4].

Nótese que si elegimos el punto $z_0 = 0$, puede usarse la rama principal

$$\operatorname{Log} w = \ln \rho + i\phi \qquad (\rho > 0, -\pi < \phi < \pi)$$

de la función logaritmo para definir g. En ese caso, $g(1) = 0$.

EJERCICIOS

1. Hallar el ángulo de rotación en $z = 2 + i$ para la transformación $w = z^2$, e ilustrarlo para alguna curva especial. Probar que el factor de escala de esa transformación en ese punto es $2\sqrt{5}$.

2. ¿Qué ángulo de rotación produce la transformación $w = 1/z$ en el punto

   a) $z = 1$; *b)* $z = i$?

   Sol. *a)* π; *b)* 0.

3. Demostrar que bajo la transformación $w = 1/z$, las imágenes de las rectas $y = x - 1$, y $y =$, son el círculo $u^2 + v^2 - u - v = 0$ y la recta $v = 0$, respectivamente. Dibujar las cuatro curvas, determinando las direcciones correspondientes en ellas, y comprobar el carácter conforme de la aplicación en el punto $z = 1$.

4. Probar que el ángulo de rotación en un punto no nulo $z_0 = r_0 \exp(i\theta_0)$ bajo la transformación $w = z^n$ ($n = 1, 2, \ldots$) es $(n - 1)\theta_0$. Hallar el factor de escala de la transformación en ese punto.

   Sol. nr_0^{n-1}.

5. Probar que la transformación $w = \operatorname{sen} z$ es conforme en todos los puntos, excepto en $z = (2n + 1)\pi/2 (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Nótese que esto está de acuerdo con la aplicación de segmentos dirigidos de recta que muestran las Figuras 9, 10 y 11 del Apéndice 2.

6. Hallar la inversa local de la transformación $w = z^2$ en el punto

   a) $z_0 = 2$; *b)* $z_0 = -2$; *c)* $z_0 = -i$.

   Sol. *a)* $w^{1/2} = \sqrt{\rho}\, e^{i\phi/2}$ $(\rho > 0, -\pi < \phi < \pi)$;
   c) $w^{1/2} = \sqrt{\rho}\, e^{i\phi/2}$ $(\rho > 0, 2\pi < \phi < 4\pi)$.

7. En la Sección 74 se hizo ver que las componentes u, v de la función inversa $g(w)$ definida por la Ecuación [9] son continuas y tienen derivadas parciales continuas de primer orden en el entorno N. Usar [8], Sección 74, para demostrar que las ecuaciones de Cauchy-Riemann $x_u = y_v$, $x_v = -y_u$ son válidas en N. Concluir de ahí que $g(w)$ es analítica en ese entorno.

8. Probar que si $z = g(w)$ es la inversa local de una transformación conforme $w = f(z)$ en un punto z_0, entonces

$$g'(w) = \frac{1}{f'(z)}$$

   en puntos w del entorno N en los que g sea analítica (Ejerc. 7).

   Sugerencia: Partir del hecho de que $f[g(w)] = w$, y aplicar la regla de la cadena para derivar funciones compuestas.

9. Sea C un arco suave contenido en un dominio D en el que la transformación $w = f(z)$ es conforme, y sea Γ la imagen de C bajo esa transformación. Probar que Γ es también un arco suave.

10. Supongamos que f es una función analítica en z_0, y que

$$f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

para algún entero positivo m ($m \geqq 1$). Además, denotemos $w_0 = f(z_0)$.

a) Mediante la serie de Taylor de f centrada en el punto z_0, probar que existe un entorno de z_0 en el que la diferencia $f(z) - w_0$ se puede escribir

$$f(z) - w_0 = (z - z_0)^m \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} [1 + g(z)],$$

con g continua en z_0 y $g(z_0) = 0$.

b) Sea Γ la imagen de un arco suave C bajo la transformación $w = f(z)$, como indica la Figura 81 (Sec. 73), y nótese que los ángulos de inclinación θ_0 y ϕ_0 en esa figura son los límites de $\arg(z - z_0)$ y $\arg[f(z) - w_0]$, respectivamente, cuando z tiende hacia z_0 a lo largo del arco C. Usar entonces el resultado de la parte *a)* para demostrar que θ_0 y ϕ_0 están relacionados por la ecuación

$$\phi_0 = m\phi_0 + \arg f^{(m)}(z_0).$$

c) Sea α el ángulo entre dos arcos suaves C_1 y C_2 que pasan por z_0, como se ve a la izquierda en la Figura 82 (Sec. 73). Poner de manifiesto cómo se sigue de la relación obtenida en *b)* que el ángulo correspondiente entre las curvas imagen Γ_1 y Γ_2 en el punto $w_0 = f(z_0)$ es $m\alpha$. (Nótese que la transformación es conforme en z_0 cuando $m = 1$ y que z_0 es un punto crítico cuando $m \geqq 2$.)

75. ARMONICAS CONJUGADAS

Vimos en la Sección 21 que si una función

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

es analítica en un dominio D, entonces las funciones reales u y v son armónicas en él. Es decir, tienen derivadas parciales continuas de primer y segundo orden en D y satisfacen allí la ecuación de Laplace:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0. \qquad [1]$$

Habíamos visto ya antes que las de primer orden cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x; \qquad [2]$$

y, como se hizo constar en la Sección 21, se dice que v es armónica conjugada de u.

Supongamos ahora que $u(x, y)$ es una función armónica dada, definida sobre un dominio D *simplemente conexo* (Sec. 38). En esta sección probaremos que

$u(x, y)$ admite siempre una armónica conjugada $v(x, y)$ en D y obtendremos una expresión para ella.

A tal fin, recordemos primero varios hechos relevantes acerca de las integrales curvilíneas (o de contorno) en Cálculo avanzado*. Supongamos que $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ tienen derivadas parciales de primer orden continuas en un dominio D simplemente conexo del plano xy, y sean (x_0, y_0) y (x, y) dos puntos cualesquiera en D. Si $P_y = Q_x$ en todo punto de D, entonces la integral curvilínea

$$\int_C P(s, t)\, ds + Q(s, t)\, dt$$

desde (x_0, y_0) hasta (x, y) es independiente del contorno C escogido, siempre que esté contenido en D. Además, si el punto (x_0, y_0) se mantiene fijo y se permite que (x, y) varíe sobre D, la integral representa una función univaluada

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(s, t)\, ds + Q(s, t)\, dt \qquad [3]$$

de x e y cuyas primeras derivadas parciales vienen dadas por las ecuaciones

$$F_x(x, y) = P(x, y), \quad F_y(x, y) = Q(x, y) \qquad [4]$$

Nótese que el valor de F cambia en una constante aditiva cuando se toma un punto (x_0, y_0) diferente.

Volviendo a la función armónica dada $u(x, y)$, observemos que la ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ se sigue que

$$(-u_y)_y = (u_x)_x$$

en todo punto de D. Asimismo, las segundas derivadas parciales de u son continuas en D; y esto significa que las derivadas de primer orden de $-u_y$ y u_x son continuas ahí. Así pues, si (x_0, y_0) es un punto fijo de D, la función

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u_t(s, t)\, ds + u_s(s, t)\, dt \qquad [5]$$

está bien definida para todo (x, y) en D, y de acuerdo con [4],

$$v_x(x, y) = -u_y(x, y), \quad v_y(x, y) = u_x(x, y). \qquad [6]$$

Estas son las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Como las derivadas de primer orden de u son continuas, es evidente de [6] que las de v también son continuas.

* Véase, por ejemplo, W. Kaplan, *Advanced Mathematics for Engineers*, pp. 546-550, 1981.

Por tanto (Sec. 18), $u + iv$ es una función analítica en D, y v es, por consiguiente, una armónica conjugada de u.

La función v definida por [5] no es, claro está, la única armónica conjugada de u. La función $v(x, y) + c$, donde c es una constante real arbitraria, es también una armónica conjugada de u. [Recordar el Ejerc. 9*a*), Sec. 21.]

Ejemplo. Sea $u(x, y) = xy$, que es armónica en todo el plano xy. Según [5], la función

$$v(x, y) = \int_{(0, 0)}^{(x, y)} -s\,ds + t\,dt$$

es una armónica conjugada de u. La integral aquí se calcula fácilmente por inspección; puede calcularse también integrando primero sobre el camino horizontal desde el punto (0, 0) al $(x, 0)$, y después sobre el vertical, desde $(x, 0)$ hasta el (x, y). El resultado es

$$v(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2,$$

y la correspondiente función analítica resulta ser

$$f(z) = xy - \frac{i}{2}(x^2 - y^2) = -\frac{i}{2}z^2.$$

76. TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES ARMONICAS

El problema de hallar una función armónica en un dominio específico que satisfaga sobre su contorno condiciones previamente establecidas es prominente en Matemática Aplicada. Si se prescriben los valores de la función sobre la frontera, el problema se conoce como un problema de contorno de primera especie, o *problema de Dirichlet*. Si se prescriben los valores de la derivada normal de la función sobre la frontera, se habla de un problema de contorno de segunda especie, o *problema de Neumann*. También aparecen combinaciones de ambos tipos de problemas.

Los dominios más frecuentes en las aplicaciones son simplemente conexos; y como una función armónica en un dominio simplemente conexo siempre tiene una armónica conjugada (Sec. 75), las soluciones de los problemas de contorno para tales dominios son las partes real e imaginaria de funciones analíticas.

Ejemplo 1. Es fácil comprobar que la función $H(x, y) = e^{-y} \operatorname{sen} x$ satisface las condiciones

$$H_{xx}(x, y) + H_{yy}(x, y) = 0, \qquad [1]$$

$$H(0, y) = 0, \quad H(\pi, y) = 0, \qquad [2]$$

$$H(x, 0) = \operatorname{sen} x, \quad \lim_{y \to \infty} H(x, y) = 0, \qquad [3]$$

que plantean un problema de Dirichlet para la franja vertical semiinfinita $0 < x < \pi$, $y > 0$ (Fig. 84). Nótese que, como

$$-ie^{iz} = e^{-y} \operatorname{sen} x - ie^{-y} \cos x,$$

la solución $H(x, y)$ citada es la parte real de la función entera $-ie^{iz}$. Es, asimismo, la parte imaginaria de la función entera e^{iz}.

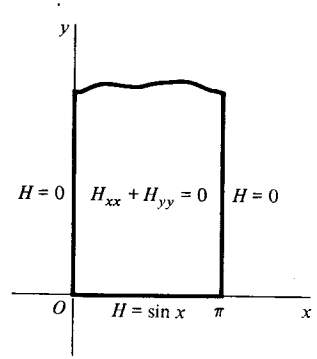


Figura 84

A veces, se puede *descubrir* una solución de un problema de contorno dado identificándola como la parte real o imaginaria de una función analítica. Pero el éxito de tal procedimiento depende de la simplicidad del problema y de la familiaridad de cada cual con las partes reales e imaginarias de diversas funciones analíticas. El siguiente teorema es de gran ayuda.

Teorema. *Supongamos que una función analítica*

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \qquad [4]$$

aplica un dominio D_z del plano z sobre un dominio D_w del plano w. Si $h(u, v)$ es una función armónica definida sobre D_w, entonces la función

$$H(x, y) = h[u(x, y), v(x, y)] \qquad [5]$$

es armónica sobre D_z.

Demostraremos en primer lugar el teorema en el caso en que el dominio D_w es simplemente conexo. Por la Sección 75 sabemos que esa propiedad de D_w

asegura que la función armónica dada $h(u, v)$ tiene una armónica conjugada $g(u, v)$. Luego la función es analítica en D_w. Puesto que la función

$$\Phi(w) = h(u, v) + ig(u, v) \qquad [6]$$

es analítica en D_z, la función compuesta $\Phi[f(z)]$ es también analítica en D_z. En consecuencia, la parte real $h[u(x, y), v(x, y)]$ de esa composición es armónica en D_z.

Si D_w *no* es simplemente conexo, hagamos notar que cada punto w_0 de D_w tiene un entorno $|w - w_0| < \varepsilon$ contenido por completo en D_w. Ya que ese entorno es simplemente conexo, una función del tipo [6] es analítica en él. Además, como f es continua en un punto z_0 de D_z cuya imagen es w_0, existe un entorno $|z - z_0| < \delta$ cuya imagen está contenida en el entorno $|w - w_0| < \varepsilon$. Por tanto, la composición $\Phi[f(z)]$ es analítica en el entorno $|z - z_0| < \delta$, y podemos concluir que $h[u(x, y), v(x, y)]$ es armónica allí. Finalmente, como w_0 era arbitrario en D_w y cada punto de D_z se aplica sobre uno de ellos bajo la transformación $w = f(z)$, la función $h[u(x, y), v(x, y)]$ ha de ser armónica en D_z.

La demostración del teorema para el caso general en que D_w no sea sólo simplemente conexo puede lograrse directamente por medio de la regla de la cadena para derivadas parciales. Los detalles, no obstante, son algo tediosos (véase Ejerc. 8, Sec. 77).

Ejemplo 2. La función $h(u, v) = e^{-v} \operatorname{sen} u$ es armónica en el dominio D_w consistente en el semiplano superior $v > 0$ (véase Ejemplo 1). Si la transformación es $w = z^2$, entonces $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$; además, el dominio D_z del plano z que consta de los puntos del primer cuadrante $x > 0$, $y > 0$, se aplica sobre D_w, como se vio en el Ejemplo 1, Sección 70. Luego la función

$$H(x, y) = e^{-2xy} \operatorname{sen}(x^2 - y^2)$$

es armónica en D_z.

Ejemplo 3. Consideremos la función $h(x, y) = \operatorname{Im} w = v$, que es armónica en la banda horizontal $-\pi/2 < v < \pi/2$. Se deduce fácilmente de la discusión que siguió al Ejemplo 2 de la Sección 68 que la transformación $w = \operatorname{Log} z$ aplica al semiplano superior $x > 0$ sobre esa banda. Escribiendo

$$\operatorname{Log} z = \ln \sqrt{x^2 + y^2} + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

donde $-\pi/2 \operatorname{arctg}(y/x) < \pi/2$, encontramos que la función

$$H(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

es armónica en el semiplano $x > 0$.

77. TRANSFORMACION DE LAS CONDICIONES DE CONTORNO Neumann

Aquellos en que una función o derivada normal toman valores prefijados sobre el contorno de un dominio en el que es armónica son los tipos más importantes, si bien no los únicos, de problemas de contorno. En esta sección probaremos que algunas de estas condiciones de contorno quedan inalteradas bajo cambios de variables asociados a una transformación conforme. Estos resultados se utilizarán en el Cap. 9 para resolver problemas de contorno. La técnica básica será la de transformar un problema de contorno dado en el plano xy en otro más sencillo en el plano uv, y usar entonces los teoremas de esta sección y de la precedente para escribir la solución del problema original en términos de la solución obtenida para el más sencillo.

Teorema. *Sea*

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \qquad [1]$$

una transformación conforme sobre un arco suave C, y sea Γ la imagen de C bajo esa transformación. Si a lo largo de Γ una función $h(u, v)$ satisface alguna de las condiciones

$$h = h_0 \quad \text{o} \quad \frac{dh}{dn} = 0, \qquad [2]$$

donde h_0 *es una constante real y dh/dn denota la derivada normal a Γ, entonces, sobre C, la función*

$$H(x, y) = h[u(x, y), v(x, y)] \qquad [3]$$

satisface la condición correspondiente

$$H = h_0 \quad \text{o} \quad \frac{dH}{dN} = 0, \qquad [4]$$

donde dh/dN denota la derivada normal a C.

Para probar que la condición $h = h_0$ sobre Γ implica que $H = h_0$ sobre C, notemos de [3] que el valor de H en cualquier punto (x, y) de C es el mismo que el valor de h en la imagen (u, v) de (x, y) bajo la transformación [1]. Como la imagen del punto (u, v) está en Γ y puesto que $h = h_0$ sobre esa curva, se sigue que $H = h_0$ sobre C.

Por otra parte, supongamos que $dh/dn = 0$ sobre Γ. El Cálculo enseña que

$$\frac{dh}{dn} = (\operatorname{grad} h) \cdot \mathbf{n}, \qquad [5]$$

donde grad h denota el gradiente de h en un punto (u, v) de Γ, y $\mathbf{n}$ es un vector unitario normal a Γ en (u, v). Ya que $dh/dn = 0$ en (u, v), la Ecuación [5] nos dice que grad h es ortogonal a $\mathbf{n}$ en (u, v). Esto es, grad h es tangente a Γ allí (Fig. 85). Ahora bien, los gradientes son ortogonales a las curvas de nivel, y como grad h es tangente a Γ, concluimos que Γ es ortogonal a la curva de nivel $h(u, v) = h_1$ que pasa por (u, v).

Según la Ecuación [3], la curva de nivel $H(x, y) = h_1$ en el plano z se puede expresar como

$$h[u(x, y), v(x, y)] = h_1;$$

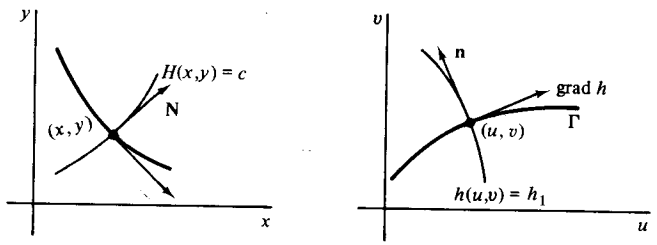


Figura 85

así que es transformada evidentemente en la curva de nivel $h(u, v) = h_1$ bajo [1]. Además, como C se transforma en Γ, y Γ es ortogonal a la curva de nivel $h(u, v) = h_1$, tal como se ha demostrado en el párrafo precedente, se deduce del carácter conforme de la transformación [1] sobre C que C es ortogonal a la curva de nivel $H(x, y) = h_1$ en el punto (x, y) correspondiente al (u, v). Debido a que los gradientes son ortogonales a las curvas de nivel, eso significa que grad H es tangente a C en (x, y) (véase Fig. 85). En consecuencia, si $\mathbf{N}$ denota un vector unitario normal a C en (x, y), grad H es ortogonal a $\mathbf{N}$. O sea,

$$(\text{grad } H) \cdot \mathbf{N} = 0. \qquad [6]$$

Finalmente, ya que

$$\frac{dH}{dN} = (\text{grad } H) \cdot \mathbf{N},$$

podemos concluir de [6] que $dH/dN = 0$ en los puntos de C.

En esta discusión hemos supuesto tácitamente que grad $h \neq \mathbf{0}$. Si grad $h = \mathbf{0}$, se sigue de la identidad

$$|\text{grad } H(x, y)| = |\text{grad } (h, v)||f'(2)|,$$

deducida en el Ejercicio 10*a*) de esta sección, que grad $H \neq \mathbf{0}$; luego dh/dn y la correspondiente derivada normal dH/dN son ambas cero. Hemos supuesto

también que: *a*) grad h y grad H existen siempre, y *b*) que la curva de nivel $H(x, y) = h_1$ es un arco suave en el punto (x, y) cuando grad $h \neq \mathbf{0}$ en (u, v). La condición *b*) garantiza que los ángulos entre arcos se conservan bajo la transformación [1] cuando es conforme. En todas las aplicaciones que estudiemos, ambas condiciones *a*) y *b*) serán satisfechas.

Ejemplo. Sea, por ejemplo, la función $h(u, v) = v + 2$. La transformación

$$w = iz^2 = -2xy + i(x^2 - y^2)$$

es conforme si $z \neq 0$. Aplica la semirrecta $y = x$ $(x > 0)$ sobre el eje u negativo, donde $h = 2$, y el eje x positivo sobre el eje v positivo, donde la derivada normal h_4 es 0 (Fig. 86). Por el teorema anterior, la función

$$H(x, y) = x^2 - y^2 + 2$$

debe cumplir las condiciones $H = 2$ sobre la semirrecta $y = x$ $(x > 0)$ y $H_y = 0$ sobre el eje x positivo, como se puede comprobar directamente.

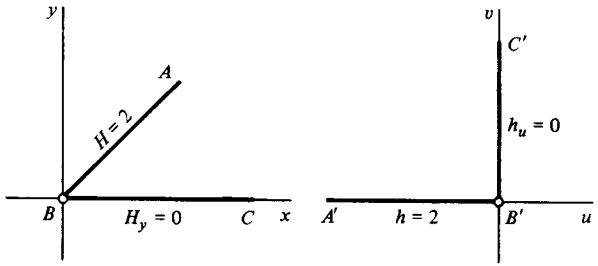


Figura 86

Una condición de contorno que no sea de uno de los dos tipos mencionados en el teorema se puede transformar en una condición que es sustancialmente diferente de la original (véase Ejerc. 6). Las nuevas condiciones de contorno para el problema transformado pueden obtenerse en cualquier caso para una transformación particular. Es interesante hacer constar que, bajo una transformación conforme, el cociente entre una derivada direccional de H a lo largo de un arco suave C en el plano z y la derivada direccional de h a lo largo de la curva imagen Γ en el punto correspondiente del plano w es $|f'(z)|$; usualmente, ese cociente no es constante a lo largo de un arco dado. (Véase Ejerc. 10.)

EJERCICIOS

1. Usar la expresión [5], Sección 75, para hallar una armónica conjugada de la función armónica $u(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Escribir la función analítica resultante en términos de la variable compleja z.

2. Sea $u(x, y)$ armónica en un dominio D simplemente conexo. Mediante los resultados de las Secciones 75 y 40, probar que sus derivadas parciales de todo orden son continuas sobre D.

3. La transformación $w = \exp z$ aplica la franja horizontal $0 < y < \pi$ sobre el semiplano superior $v > 0$, como indica la Figura 6 del Apéndice 2; y la función

$$h(u, v) = \mathrm{Re}\,(w^2) = u^2 - v^2$$

es armónica en ese semiplano. Con ayuda del teorema de la Sección 76, demostrar que la función $H(x, y) = e^{2x} \cos 2y$ es armónica en la franja. Verificar este resultado directamente.

4. Bajo la transformación $w = \exp z$, la imagen del segmento $0 \leqq y \leqq \pi$ del eje y es el semicírculo $u^2 + v^2 = 1$, $v \geqq 0$. Además, la función

$$h(u, v) = \mathrm{Re}\left(2 - w + \frac{1}{w}\right) = 2 - u + \frac{u}{u^2 + v^2}$$

es armónica en todo el plano w, excepto en el origen, y toma el valor $h = 2$ sobre el semicírculo. Escribir una expresión explícita para la función $H(x, y)$ definida en el teorema de la Sección 77. Ilustrar entonces el teorema probando directamente que $H = 2$ sobre el segmento $0 \leqq y \leqq \pi$ del eje y.

5. La transformación $w = z^2$ aplica los ejes x e y positivos y el origen del plano z sobre el eje u del plano w. Consideremos la función armónica

$$h(u, v) = \mathrm{Re}\,(e^{-w}) = e^{-u} \cos v,$$

y observemos que su derivada normal h_v es cero sobre el eje u. Ilustrar el teorema de la Sección 77 para $f(z) = z^2$, probando directamente que la derivada normal de la función $H(x, y)$ definida en el teorema es cero sobre los dos ejes positivos del plano z. (Nótese que la transformación $w = z^2$ no es conforme en el origen.)

6. Sustituir la función h del Ejercicio 5 por la función armónica

$$h(u, v) = \mathrm{Re}\,(-2iw + e^{-w}) = 2v + e^{-u} \cos v.$$

Entonces probar que $h_v = 2$ sobre el eje u, pero $H_y = 4x$ sobre el eje x positivo y $H_x = 4y$ sobre el eje y positivo. Esto ilustra cómo una condición del tipo

$$\frac{dh}{dh} = h_0 \neq 0$$

no se transforma necesariamente en una condición del tipo $dH/dN = h_0$.

7. Probar que si una función $H(x, y)$ es solución de un problema de Neumann (Sec. 76), entonces $H(x, y) + A$, donde A es cualquier constante real, también es solución de ese problema.

8. Supongamos que una función analítica $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ aplica un dominio D_z del plano z sobre un dominio D_w del plano w; y sea $h(u, v)$ una función

con derivadas principales de primer y segundo orden continuas, definida sobre D_w. Usar la regla de la cadena para derivadas parciales con el fin de demostrar que si $H(x, y) = h[u(x, y), v(x, y)]$, entonces

$$H_{xx}(x, y) + H_{yy}(x, y) = [h_{uu}(u, v) + h_{vv}(u, v)]|f'(z)|^2.$$

Concluir que la función $H(x, y)$ es armónica en D si $h(u, v)$ lo es en D_w. Esto proporciona una nueva demostración del teorema de la Sección 76, incluso si el dominio D_w no es simplemente conexo.

Sugerencia: En las simplificaciones es importante notar que al ser f analítica, las ecuaciones de Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, son válidas, y que las funciones u y v satisfacen ambas la ecuación de Laplace. Asimismo, las condiciones de continuidad sobre las derivadas de h aseguran que $h_{uv} = h_{vu}$.

9. Sea $p(u, v)$ una función que tiene derivadas parciales de primer y segundo orden continuas y satisface la *ecuación de Poisson*

$$p_{uu}(u, v) + p_{vv}(u, v) = \Phi(u, v)$$

en un dominio D_w del plano w, donde Φ es una función prefijada. Poner de manifiesto cómo de la identidad obtenida en el Ejercicio 8 se desprende que si una función analítica

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

aplica un dominio D_z sobre un dominio D_w, entonces la función

$$P(x, y) = p[u(x, y), v(x, y)]$$

satisface en D_z la ecuación de Poisson

$$P_{xx}(x, y) + P_{yy}(x, y) = \Phi[u(x, y), v(x, y)]|f'(z)|^2.$$

10. Sea $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una aplicación conforme de un arco suave C sobre un arco suave Γ del plano w. Sea $h(u, v)$ definida sobre Γ, y escribamos

$$H(x, y) = h[u(x, y), v(x, y)].$$

a) Sabemos por el Cálculo que las componentes x e y de grad H son las derivadas parciales H_x y H_y, respectivamente. Del mismo modo, grad h tiene componentes h_u y h_v. Aplicando la regla de la cadena para derivadas parciales, y haciendo uso de las ecuaciones de Cauchy-Reimann, probar que si (x, y) es un punto de C y (u, v) su imagen en Γ, entonces

$$|\mathrm{grad}\, H(x, y)| = |\mathrm{grad}\, h(u, v)||f'(z)|.$$

b) Probar que el ángulo entre el arco C y grad H en el punto (x, y) de C es igual al ángulo entre Γ y grad h en la imagen (u, v) del punto (x, y).

c) Sean s, σ las distancias a lo largo de los arcos C y Γ, respectivamente. Sean $\mathbf{t}$ y $\boldsymbol{\tau}$ vectores unitarios tangentes en un punto (x, y) de C y su imagen (u, v), en la

dirección de distancia creciente. Con ayuda de los resultados de las partes *a*) y *b*), y usando el hecho de que

$$\frac{dH}{ds} = (\text{grad } H)\cdot \mathbf{t} \quad \text{y} \quad \frac{dh}{d\sigma} = (\text{grad } h)\cdot \tau,$$

probar que la derivada direccional a lo largo del arco Γ se transforma como sigue:

$$\frac{dH}{ds} = \frac{dh}{d\sigma}\,|f'(z)|.$$

CAPITULO

NUEVE

APLICACIONES DE LAS TRANSFORMACIONES CONFORMES

Utilizaremos ahora transformaciones conformes para resolver un cierto número de problemas relativos a la ecuación de Laplace en dos variables independientes. Trataremos cuestiones de conducción térmica, potencial electrostático y flujo de fluidos. Puesto que estos problemas tienen por objetivo ilustrar los métodos, se mantendrán a un nivel elemental.

78. TEMPERATURAS ESTACIONARIAS

En la teoría de la conducción del calor, el *flujo* a través de una superficie interior a un sólido en un punto de tal superficie es la cantidad de calor que fluye en una dirección específica normal a la superficie por unidad de tiempo y por unidad de área en el punto. Por tanto, el flujo se mide en unidades tales como calorías por segundo por centímetro cuadrado. Lo denotaremos aquí por Φ, y varía con la derivada normal de la temperatura T en el punto en cuestión:

$$\Phi = -K\frac{dT}{dN} \qquad (K > 0). \qquad [1]$$

La constante K se conoce como la *conductividad térmica* del material del sólido, que se supone homogéneo.

A los puntos del sólido se les asignan coordenadas rectangulares en el espacio tridimensional, y restringimos nuestra atención a aquellos casos en que la temperatura T varía sólo con las coordenadas x, y. Ya que T no varía con la coordenada perpendicular al plano xy, el flujo de calor es bidimensional y paralelo a ese plano. Supondremos además que el flujo es estacionario, es decir, que T no varía con el tiempo.

Damos por cierto que ni se crea ni se destruye energía térmica en el interior del sólido. Esto es, no hay en él ni fuentes ni sumideros de calor. Además, la función temperatura $T(x, y)$ y sus derivadas parciales de primer y segundo orden son continuas en todo punto interior al sólido. Esta afirmación y la expresión [1] para el flujo de calor son postulados para la formulación matemática de la teoría

de conducción térmica, aplicables también al interior de un sólido que contenga una distribución continua de fuentes o sumideros.

Consideremos ahora un elemento de volumen interior al sólido en forma de prisma rectangular de altura unidad perpendicular al plano xy, con base Δx por Δy en ese plano (Fig. 87). La razón a la que el calor fluye hacia la derecha a través de la cara izquierda es $-KT_x(x, y)\,\Delta y$; y hacia la derecha a través de la cara derecha es $-KT_x(x + \Delta x, y)\,\Delta y$. Restando uno de otro, obtenemos la razón de pérdida de calor de ese elemento a través de las dos caras, a saber,

$$-K\left[\frac{T_x(x + \Delta x, y) - T_x(x, y)}{\Delta x}\right]\Delta x\,\Delta y,$$

o sea

$$-KT_{xx}(x, y)\,\Delta x\,\Delta y \qquad [2]$$

si Δx es muy pequeño. La expresión [2] es, claro está, una aproximación, cuya precisión aumenta al haer Δx, Δy más y más pequeños.

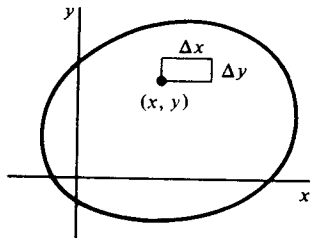


Figura 87

De manera análoga, la razón de pérdida de calor a través de las otras dos caras perpendiculares al plano xy, resulta ser

$$-KT_{yy}(x, y)\,\Delta x\,\Delta y \qquad [3]$$

El calor entra o sale del elemento sólo a través de esas cuatro caras, y las temperaturas dentro de él son estacionarias. Luego la suma de [2] y [3] es cero; o sea,

$$T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) = 0. \qquad [4]$$

La función temperatura satisface, por tanto, la ecuación de Laplace en todo punto interior al sólido.

En vista de [4] y de la continuidad de la función temperaura y de sus derivadas parciales, *T es una función armónica de x e y* en el dominio representado por el interior del sólido.

Las superficies $T(x, y) = c_1$, donde c_1 es cualquier constante real, son las isotermas interiores al sólido. Pueden considerarse también como curvas en el plano xy; entonces $T(x, y)$ puede interpretarse como la temperatura en un punto (x, y) de una fina placa de material en ese plano, con sus caras aisladas térmicamente. Las isotermas son las curvas de nivel de la función T.

El gradiente de T es perpendicular a la isoterma en cada punto, y el flujo máximo en un punto va en la dirección del gradiente en ese punto. Si $T(x, y)$ denota la temperatura en una placa delgada y S es una armónica conjugada de la función T, entonces una curva $S(x, y) = c_2$ tiene al gradiente de T como vector tangente en cada punto en que la función analítica $T(x, y) + iS(x, y)$ sea conforme. Las curvas $S(x, y) = c_2$ se llaman *líneas de flujo*.

Si la derivada normal dT/dN es cero sobre cualquier fragmento de la frontera de la placa, el flujo de calor por él es nulo. Es decir, esa parte está térmicamente aislada y es, en consecuencia, una línea de flujo.

La función T puede, asimismo, denotar la concentración de una sustancia que se difunde por un sólido. En tal caso, K es la constante de difusión. La discusión anterior y la deducción de la Ecuación [4] son aplicables a la difusión en estado estacionario.

79. TEMPERATURAS ESTACIONARIAS EN UN SEMIPLANO

Hallemos una expresión para las temperaturas estacionarias $T(x, y)$ en una placa delgada constituida por el semiplano $y \geqq 0$ cuyas caras están aisladas y cuyo borde $y = 0$ se mantiene a temperatura cero, excepto el segmento $-1 < x < 1$, donde se mantiene un valor unidad para la temperatura (Fig. 88). La función $T(x, y)$ ha de ser acotada; esta condición es natural si consideramos la placa dada como límite del caso $0 \leqq y \leqq y_0$ cuyo borde superior se mantiene a temperatura fija mientras y_0 crece. De hecho, sería físicamente razonable estipular que $T(x, y)$ tiende a cero cuando y tiende a infinito.

El problema de contorno que debemos resolver se formula así:

$$T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) = 0 \qquad (-\infty < x < \infty, y > 0), \qquad [1]$$

$$T(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| > 1; \end{cases} \qquad [2]$$

además, $|T(x, y)| < M$, donde M es una constante positiva. Este es el problema de Dirichlet para un semiplano del plano xy. Nuestro método de solución consistirá en obtener un nuevo problema de Dirichlet para una región del plano uv. Esta región será la imagen del semiplano bajo una transformación $w = f(z)$ analítica en el dominio $y > 0$ y conforme sobre el borde $y = 0$, excepto en los puntos $(\pm 1, 0)$, en los que no está definida. Será fácil descubrir una función armónica acotada que satisfaga el nuevo problema. Los dos teoremas del Capítulo 8 se aprovecharán entonces para transformar la solución del problema en el

plano uv en una solución del problema original en el plano xy. Concretamente, una función armónica de u, v se transformará en una función armónica de x, y, y las condiciones de contorno en el plano uv se preservarán sobre las porciones correspondientes de la frontera en el plano xy. Experamos que no provoque confusión el uso del mismo símbolo T para denotar las funciones de temperatura en ambos planos.

Escribamos

$$z - 1 = r_1 \exp(i\theta_1) \quad \text{y} \quad z + 1 = r_2 \exp(i\theta_2),$$

donde $0 \leqq \theta_k \leqq \pi$ $(k = 1, 2)$. La transformación

$$w = \log \frac{z-1}{z+1} = \ln \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2) \qquad \left(\frac{r_1}{r_2} > 0,\ -\frac{\pi}{2} < \theta_1 - \theta_2 < \frac{3\pi}{2}\right) \qquad [3]$$

está definida sobre el semiplano superior $y \geqq 0$, excepto en los puntos $z = \pm 1$, ya que $0 \leqq \theta_1 - \theta_2 \leqq \pi$ de esa región. (Véase Fig. 88.) Ahora el valor del logaritmo es el valor principal cuando $0 \leqq \theta_1 - \theta_2 \leqq \pi$, y observamos de la Figura 19 del Apéndice 2 que el semiplano superior $y > 0$ se aplica sobre la franja $0 < v < \pi$ del plano w. De hecho, es esta figura la que sugiere la transformación [3]. El segmento del eje x entre $z = -1$ y $z = 1$, donde $\theta_1 - \theta_2 = \pi$, se aplica sobre el borde superior de esa franja; y el resto del eje x, donde $\theta_1 - \theta_2 = 0$, sobre el borde inferior. La transformación [3] cumple obviamente las condiciones de analiticidad y conformidad exigidas.

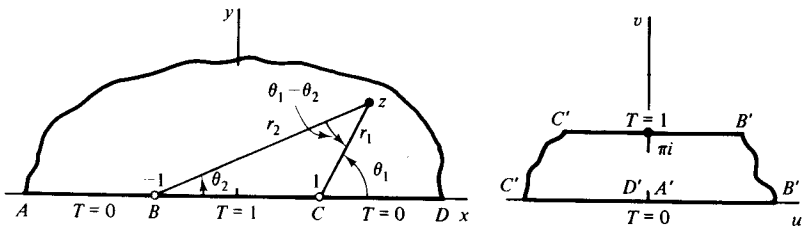


Figura 88. $w = \log \dfrac{z-1}{z+1} \left(\dfrac{r_1}{r_2} > 0,\ -\dfrac{\pi}{2} < \theta_1 - \theta_2 < \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Una función armónica acotada de u, v que es nula sobre el borde $v = 0$ de la franja e igual a la unidad sobre el borde $v = \pi$, es claramente

$$T = \frac{1}{\pi} v; \qquad [4]$$

es armónica por ser la parte imaginaria de la función entera $(1/\pi)w$. Cambiando a coordenadas x, y por medio de la ecuación

$$w = \ln \left|\frac{z-1}{z+1}\right| + i \arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right), \qquad [5]$$

vemos que

$$v = \arg\left[\frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{(z+1)(\bar{z}+1)}\right] = \arg\left[\frac{x^2 + y^2 - 1 + i2y}{(x+1)^2 + y^2}\right],$$

es decir,

$$v = \operatorname{arctg}\left(\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1}\right).$$

Aquí el recorrido de la función arcotangente es de 0 a π, ya que

$$\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \theta_1 - \theta_2$$

y $0 \leqq \theta_1 - \theta_2 \leqq \pi$. La expresión [4] adopta ahora la forma

$$T = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1}\right) \qquad (0 \leqq \operatorname{arctg} t \leqq \pi). \qquad [6]$$

Como la función [4] es armónica en la banda $0 < v < \pi$ y la transformación [3] es analítica en el semiplano $y > 0$, podemos aplicar el teorema de la Sección 76 para concluir que la función [6] es armónica en ese semiplano. Las condiciones de contorno son las mismas para las dos funciones armónicas sobre partes correspondientes de las fronteras, ya que son del tipo $h = h_0$ tratado en el teorema de la Sección 77. La función acotada [6] es, por tanto, la anhelada solución del problema original. Uno puede, claro está, verificar directamente que la función [6] cumple la ecuación de Laplace y que sus valores tienden a los indicados a la izquierda en la Figura 88 cuando el punto (x, y) desciende hacia el eje x.

Las isotermas $T(x, y) = c_1$ $(0 < c_1 < 1)$ son arcos de los círculos

$$x^2 + (y - \operatorname{ctg} \pi c_1)^2 = \operatorname{csec}^2 \pi c_1,$$

que pasan por los puntos $(\pm 1, 0)$, con centros en el eje y.

Finalmente, hagamos notar que como el producto de una función armónica por una constante es también una función armónica, la función

$$T = \frac{T_0}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1}\right) \qquad (0 \leqq \operatorname{arctg} t \leqq \pi)$$

representa las temperaturas estacionarias en el semiplano dado cuando la temperatura $T = 1$ sobre el segmento $-1 < x < 1$ del eje x se sustituye por otro valor fijo cualquiera $T = T_0$.

80. UN PROBLEMA RELACIONADO

Consideremos una losa semiinfinita en el espacio tridimensional, acotado por los planos $x = \pm\pi/2$ e $y = 0$, cuando las dos primeras superficies se mantienen a temperatura cero y la última a temperatura unidad. Deseamos hallar una expresión para la temperatura $T(x, y)$ en cualquier punto interior a la losa. El problema es también el de hallar las temperaturas en una placa delgada que tiene la forma de una banda semiinfinita $-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2$, $y \geqq 0$ con sus caras perfectamente aisladas (Fig. 89).

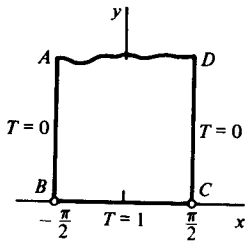


Figura 89

El problema de contorno es ahora

$$T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) = 0 \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ y > 0\right), \qquad [1]$$

$$T\left(-\frac{\pi}{2}, y\right) = T\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 0 \qquad (y > 0), \qquad [2]$$

$$T(x, 0) = 1 \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right), \qquad [3]$$

donde $T(x, y)$ es acotada.

A la vista del Ejemplo 1 en la Sección 69, así como de la Figura 9 del Apéndice 2, la aplicación

$$w = \operatorname{sen} z \qquad [4]$$

transforma este problema de contorno en el planteado en la Sección 79 (Fig. 88). Por tanto, de acuerdo con la solución [6] de esa sección,

$$T = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{2v}{u^2 + v^2 - 1}\right) \qquad (0 \leqq \operatorname{arctg} t \leqq \pi). \qquad [5]$$

El cambio de variables indicado en la Ecuación [4] se puede escribir

$$u = \operatorname{sen} x \cosh y, \quad v = \cos x \operatorname{senh} y;$$

y la función armónica [5] se convierte en

$$T = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{2 \cos x \operatorname{senh} y}{\operatorname{sen}^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \operatorname{senh}^2 y - 1}\right).$$

Como el denominador se reduce a $\operatorname{senh}^2 y - \cos^2 x$, el cociente se puede poner en la forma

$$\frac{2 \cos x \operatorname{senh} y}{\operatorname{senh}^2 y - \cos^2 x} = \frac{2(\cos x/\operatorname{senh} y)}{1 - (\cos x/\operatorname{senh} y)^2} = \operatorname{tg} 2\alpha,$$

donde $\operatorname{tg} \alpha = \cos x/\operatorname{senh} y$. Por tanto, $T = (2/\pi)\alpha$; esto es,

$$T = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{\operatorname{senh} y}\right) \qquad \left(0 \leqq \operatorname{arctg} t \leqq \frac{\pi}{2}\right). \qquad [6]$$

Esta función arcotangente tiene recorrido de 0 a $\pi/2$, ya que su argumento es no negativo.

Dado que sen z es entera y la función [5] es armónica en el semiplano $v > 0$, la función [6] es armónica en la banda $-\pi/2 < x < \pi/2$, $y > 0$, Asimismo, la función [5] satisface la condición de contorno $T = 1$ cuando $|u| < 1$ y $v = 0$, así como la condición $T = 0$ cuando $|u| > 1$ y $v = 0$. Luego la función [6] satisface las condiciones de contorno [2] y [3]. Además, $|T(x, y)| \leqq 1$ sobre la banda. La expresión [6] es, por consiguiente, la fórmula buscada para la temperatura.

Las isotermas $T(x, y) = c_1$ $(0 < c_1 < 1)$ son las porciones de las superficies

$$\cos x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi c_1}{2}\right) \operatorname{senh} y$$

interiores a la losa, pasando cada una de ellas por los puntos $(\pm\pi/2, 0)$ del plano xy. Si K es la conductividad térmica, el flujo de calor en la losa a través de la superficie que está en el plano $y = 0$ es

$$-KT_y(x, 0) = \frac{2K}{\pi \cos x} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

El flujo que sale a través de la superficie que está en el plano $x = \pi/2$ es

$$-KT_x\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = \frac{2K}{\pi \operatorname{senh} y} \qquad (y > 0).$$

El problema de contorno planteado en esta sección puede resolverse por el *método de separación de variables*. Ese método es más directo, pero da la solución en forma de serie infinita*.

* Esencialmente este mismo problema está tratado en el libro del autor *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 4.ª ed., Problema 8, pág. 127, 1987. En su Capítulo 10 puede encontrarse también una breve discusión sobre la unicidad de las soluciones a problemas de contorno.

81. TEMPERATURAS EN UN CUADRANTE

Vamos a hallar las temperaturas estacionarias en una placa delgada en forma de un cuadrante, si se aísla un segmento al extremo de uno de sus bordes, mientras el resto de ese borde se mantiene a una temperatura fija, y el segundo borde se mantiene a otra temperatura fija. Las superficies están aisladas, de modo que el problema es bidimensional.

Se pueden escoger la escala de temperaturas y la unidad de longitud de modo tal que el problema de contorno para la función temperatura sea

$$T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) = 0 \qquad (x > 0, y > 0), \tag{1}$$

$$\begin{cases} T_y(x, 0) = 0 & \text{si} \quad 0 < x < 1, \\ T(x, 0) = 1 & \text{si} \quad x > 1, \end{cases} \tag{2}$$

$$T(0, y) = 0 \qquad (y > 0), \tag{3}$$

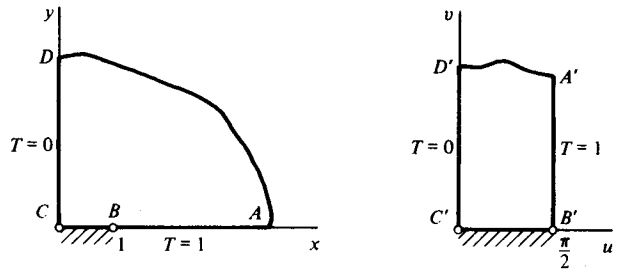


Figura 90

donde $T(x, y)$ es acotada en el cuadrante. La placa y sus condiciones de contorno se muestran en la Figura 90. Las condiciones [2] prescriben el valor de la derivada normal de la función T en una parte de una recta del contorno y el valor de la propia función sobre el resto de esa recta. El método de separación de variables mencionado al final de la Sección 80 no se adapta a tales problemas, con diferentes tipos de condiciones a lo largo de la misma recta frontera.

Como se indica en la Figura 10 del Apéndice 2, la transformación

$$z = \operatorname{sen} w \tag{4}$$

es una aplicación uno a uno de la banda $0 \leqq u \leqq \pi/2$, $v \geqq 0$ sobre el cuadrante $x \geqq 0$, $y \geqq 0$. Nótese que ahora la existencia de inversa está garantizada por el hecho de que la transformación dada es a la vez uno a uno y suprayectiva. Como la transformación [4] es conforme en la franja, excepto en el punto $w = \pi/2$, la transformación inversa es conforme en el cuadrante, salvo en el punto $z = 1$. Esa transformación inversa aplica el segmento $0 < x < 1$ del eje x sobre la base de la franja, y el resto de la frontera sobre los lados de la franja, como muestra la Figura 90.

Al ser conforme en el cuadrante la transformación inversa de [4], excepto en $z = 1$, la solución del problema dado puede obtenerse encontrando una función que sea armónica en la franja y que satisfaga las condiciones de contorno que se ven a la derecha en la Figura 90. Nótese que estas condiciones de contorno son de los tipos $h = h_0$ y $dh/dn = 0$ del teorema de la Sección 77.

La requerida temperatura estacionaria T para el nuevo problema de contorno es claramente

$$T = \frac{2}{\pi} u, \tag{5}$$

siendo la función $(2/\pi)u$ la parte real de la función entera $(2/\pi)w$. Ahora hemos de expresar T en términos de x e y.

Para hallar u en términos de x e y, hagamos notar en primer lugar que, de acuerdo con [4],

$$x = \operatorname{sen} u \cosh v, \quad y = \cos u \operatorname{senh} v. \tag{6}$$

Cuando $0 < u < \pi/2$, tanto sen u como cos u son no nulos y, en consecuencia,

$$\frac{x^2}{\operatorname{sen}^2 u} - \frac{y^2}{\cos^2 u} = 1. \tag{7}$$

Conviene observar ahora que, para cada u fijo, la hipérbola [7] tiene sus focos en los puntos

$$z = \pm\sqrt{\operatorname{sen}^2 u + \cos^2 u} = \pm 1$$

y que la longitud del eje transverso, que es el segmento recto que une los dos vértices, es $2 \operatorname{sen} u$. Así pues, el valor absoluto de la diferencia de las distancias entre los focos y un punto (x, y) que esté en la porción del primer cuadrante de la hipérbola es

$$\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} - \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = 2 \operatorname{sen} u.$$

Se sigue directamente de [6] que esta relación es válida también cuando $u = 0$ o $u = \pi/2$. Según [5], la requerida función temperatura es, por tanto,

$$T = \frac{2}{\pi} \operatorname{arcsen} \frac{1}{2} \left[\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} - \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}\right], \tag{8}$$

donde al ser $0 \leqq u \leqq \pi/2$, la función arcoseno tiene recorrido entre 0 y $\pi/2$.

Si se desea comprobar que esta función cumple las condiciones de contorno [2], basta recordar que $\sqrt{(x - 1)^2}$ denota $x - 1$ si $x > 1$ y $1 - x$ si $0 < x < 1$,

siendo positivas las raíces cuadradas. Nótese además que la temperatura en cualquier punto de la parte aislada del borde inferior de la placa es

$$T(x, 0) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arcsen} x \qquad (0 < x < 1).$$

Se ve de la Ecuación [5] que las isotermas $T(x, y) = c_1$ $(0 < c_1 < 1)$ son las partes de las hipérbolas cofocales [7], con $u = \pi c_1/2$, que están en el primer cuadrante. Como la función $(2/\pi)v$ es armónica conjugada de la función [5], las líneas de flujo son cuartos de las elipses cofocales obtenidas al mantener v constante en las Ecuaciones [6].

EJERCICIOS

1. En el problema de la placa semiinfinita de la izquierda de la Figura 88, Sección 79, obtener una armónica conjugada de la función temperatura $T(x, y)$ de la Ecuación [5], Sección 79, y hallar las líneas de flujo del calor. Probar que éstas consisten en la parte superior del eje y y las mitades superiores de ciertos círculos a ambos lados de ese eje, estando los círculos centrados en los segmentos AB o CD del eje x.

2. Demostrar que si no se exige que la función T de la Sección 79 sea acotada, entonces la función armónica [4] de esa sección puede sustituirse por la función armónica

$$T = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\pi} w + A \cosh w\right) = \frac{1}{\pi} v + A \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v,$$

donde A es una constante real arbitraria. Concluir que la solución del problema de Dirichlet para la banda del plano uv (Fig. 88) no sería única.

3. Supongamos que se omite la condición de acotación de T en el problema de las temperaturas en la losa semiinfinita de la Sección 80 (Fig. 89). Probar que entonces son posibles infinitas soluciones, analizando el efecto de añadir a la solución encontrada allí la parte imaginaria de la función $A \operatorname{sen} z$, donde A es una constante real arbitraria.

4. Usar la función Log z para hallar una expresión de las temperaturas estacionarias en una placa en forma de cuadrante $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, si sus caras están perfectamente aisladas y sus bordes tienen temperaturas $T(x, 0) = 0$ y $T(0, y) = 1$ (Fig. 91). Hallar las isotermas y las líneas de flujo, dibujando además algunas de ellas.

Sol. $T = (2/\pi \operatorname{arctg}(y/x)$.

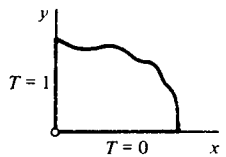


Figura 91

5. Hallar las temperaturas estacionarias en un sólido cuya forma es la de una larga cuña cilíndrica, si sus planos frontera $\theta = 0$ y $\theta = \theta_0$ $(0 < r < r_0)$ se mantienen a temperaturas constantes 0 y T_0, respectivamente, y su superficie $r = r_0$ $(0 < \theta < \theta_0)$ está perfectamente aislada (Fig. 92).

Sol. $T = (T_0/\theta_0) \operatorname{arctg}(y/x)$.

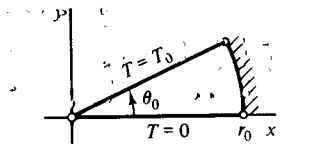


Figura 92

6. Hallar las temperaturas estacionarias $T(x, y)$ en el sólido semiinfinito $y \geqq 0$ si $T = 0$ en la parte $x < -1$, $y = 0$ del contorno, si $T = 1$ en la parte $x > 1$, $y = 0$, y si la banda $-1 < x < 1$, $y = 0$ del contorno está aislada (Fig. 93).

Sol. $T = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arcsen} \frac{1}{2}\left[\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}\right]$

$(-\pi/2 \leqq \operatorname{arcsen} t \leqq \pi/2)$.

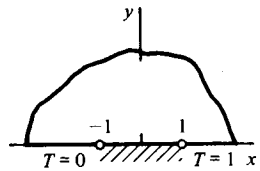


Figura 93

7. Hallar las temperaturas estacionarias acotadas en el sólido $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, cuando las superficies frontera se mantienen a temperaturas fijas, excepto fragmentos aislados de la misma anchura en la esquina, como indica la Figura 94.

Sol. $T = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arcsen} \frac{1}{2}\left[\sqrt{(x^2 - y^2 + 1)^2 + 4x^2y^2} - \sqrt{(x^2 - y^2 - 1)^2 + 4x^2y^2}\right]$

$(-\pi/2 \leqq \operatorname{arcsen} t \leqq \pi/2)$.

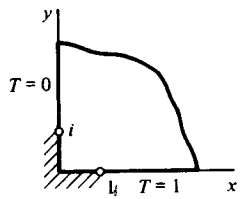


Figura 94

8. Resolver el problema de Dirichlet para una franja semiinfinita (Fig. 95):

$$H_{xx}(x, y) + H_{yy}(x, y) = 0 \quad (0 < x < \pi/2,\ y > 0,$$
$$H(x, 0) = 0 \quad (0 < x < \pi/2),$$
$$H(0, y) = 1, \quad H(\pi/2, y) = 0 \quad (y > 0),$$

donde $0 \leqq H(x, y) \leqq 1$.

Sugerencia: Este problema se puede transformar en el del Ejercicio 4.

Sol. $H = \dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\operatorname{tgh} y}{\operatorname{tg} x}\right)$.

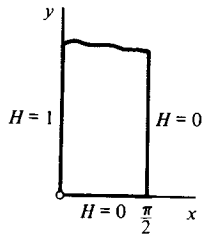


Figura 95

9. Deducir una expresión para las temperaturas $T(r, \theta)$ en una placa semicircular $r \leqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$, con caras aisladas, si $T = 1$ a lo largo de la arista radial $\theta = 0\,(0 < r < 1)$, y $T = 0$ en el resto del contorno.

Sugerencia: Este problema se puede transformar en el del Ejercicio 8.

Sol. $T = \dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1 - r}{1 + r} \operatorname{ctg} \dfrac{\theta}{2}\right)$.

10. Resolver el problema de contorno para la placa $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, en el plano z, cuando las caras están aisladas y las condiciones de contorno son las indicadas en la Figura 96.

Sugerencia: Usar la aplicación $w = i/z = i\bar{z}/|z|^2$ para transformar este problema en el planteado en la Sección 81 (Fig. 90).

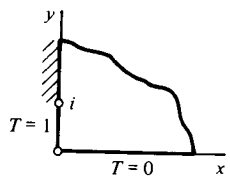


Figura 96

11. Las porciones $x < 0$, $y = 0$ y $x < 0$, $y = \pi$ de las aristas de una placa infinita $0 \leqq y \leqq \pi$ están aisladas térmicamente, al igual que sus caras. Las condiciones $T(x, 0) = 1$ y $T(x, \pi) = 0$ se mantienen en $x > 0$ (Fig. 97). Hallar las temperaturas estacionarias en la placa.

Sugerencia: Este problema se puede transformar en el del Ejercicio 6.

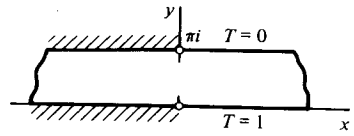


Figura 97

12. Sea una placa delgada, con las caras aisladas, cuya forma es la de la mitad superior de la región encerrada por una elipse de focos $(\pm 1, 0)$. La temperatura en la parte elíptica de su contorno es $T = 1$. La temperatura a lo largo del segmento $-1 < x < 1$ del eje x es $T = 0$, y el resto del contorno del eje x está aislado. Con ayuda de la Figura 11 del Apéndice 2, hallar las líneas de flujo del calor.

13. Según la Sección 42 y el Ejercicio 4, Sección 43, si una función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es continua en una región cerrada y acotada R, y analítica y no constante en su interior, entonces la función $u(x, y)$ alcanza sus valores máximo y mínimo en la frontera de R, nunca en su interior. Interpretando $u(x, y)$ como una temperatura estacionaria, dar una razón física de por qué tal propiedad ha de ser cierta.

82. POTENCIAL ELECTROSTATICO

En un campo de fuerzas electrostático, la *intensidad del campo* en un punto es un vector que representa la fuerza ejercida sobre una carga positiva unidad colocada en ese punto. El potencial electrostático es una función escalar de las coordenadas espaciales tal que, en cada punto, su derivada direccional en cualquier dirección es la opuesta de la componente de la intensidad del campo en esa dirección.

Para dos partículas cargadas estacionarias, la magnitud de la fuerza de atracción o repulsión ejercida por una partícula sobre la otra es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre las partículas. De esta ley del cuadrado inverso se puede deducir que el potencial en un punto debido a una sola partícula en el espacio es inversamente proporcional a la distancia entre el punto y la partícula. En toda región libre de cargas, se puede demostrar que el potencial debido a una distribución de cargas externa a esa región satisface la ecuación de Laplace para el espacio tridimensional.

Si las condiciones son tales que el potencial V es el mismo en todos los planos paralelos al plano xy, entonces en regiones libres de cargas V es una función armónica de sólo dos variables x e y:

$$V_{xx}(x, y) + V_{yy}(x, y) = 0.$$

El vector intensidad del campo en cada punto es paralelo al plano xy, con componentes x e y respectivas $-V_x(x, y)$ y $-V_y(x, y)$. Por tanto, el vector es el opuesto del gradiente de $V(x, y)$.

Una superficie sobre la que $V(x, y)$ es constante se llama una superficie equipotencial. La componente tangencial del vector intensidad del campo en un

punto de una superficie conductora es cero en el caso estático, pues las cargas son libres de desplazarse sobre ella. Por tanto, $V(x, y)$ es constante sobre la superficie de un conductor, y esa superficie es *equipotencial.*

Si U es una armónica conjugada de V, las curvas $U(x, y) = c_2$ en el plano xy se llaman *líneas de flujo.* Cuando una de estas curvas intersecta a una curva equipotencial $V(x, y) = c_1$ en un punto en que la derivada de la función analítica $V(x, y) + iU(x, y)$ es no nula, las dos curvas son ortogonales en ese punto y la intensidad del campo es tangente a la línea de flujo allí.

Los problemas de contorno para el potencial V son los mismos que para las temperaturas estacionarias T y, como en este caso, los métodos de variable compleja se limitan a situaciones bidimensionales. El problema planteado en la Sección 80 (Fig. 89), por ejemplo, puede ser interpretado como el de hallar el potencial electrostático bidimensional en el espacio vacío $-\pi/2 < x < \pi/2$, $y > 0$ limitado por los planos conductores $x = \pm\pi/2$ e $y = 0$, aislado en sus intersecciones, cuando las primeras dos superficies se mantienen a potencial cero y la tercera a potencial unidad. En Electrónica aparecen situaciones de este tipo. Si la carga espacial interior a un tubo de vacío es pequeña, se considera a veces el espacio como libre de cargas y se supone que allí el potencial satisface la ecuación de Laplace.

El potencial en el flujo estacionario de electricidad en una lámina conductora plana es también una función armónica en zonas libres de fuentes o sumideros. El potencial gravitatorio es otro ejemplo de función armónica en Física.

83. POTENCIAL EN UN ESPACIO CILINDRICO

Un largo cilindro circular hueco, formado por una fina capa de material conductor, está cortado longitudinalmente en dos partes iguales. Estas dos partes están separadas por cintas muy finas de material aislante y se usan como electrodos, uno de ellos conectado a tierra a potencial cero y el otro mantenido a potencial fijo no nulo. Tomamos los ejes de coordenadas y las unidades de longitud y de diferencia de potencial como se indica a la izquierda en la Figura 98. Interpretamos entonces el potencial electrostático $V(x, y)$ sobre cualquier sección transversal del espacio encerrado distante de los extremos del cilindro como una función armónica dentro del círculo $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy. Nótese que $V = 0$ en la mitad superior del círculo y $V = 1$ en la inferior.

Una transformación racional lineal que aplica el semiplano superior sobre el interior del círculo unidad centrado en el origen, el eje real positivo sobre la mitad superior del círculo y el eje real negativo sobre la mitad inferior del círculo, fue presentada en el Ejercicio 11 de la Sección 67. El resultado se recoge en la Figura 13 del Apéndice 2; intercambiando z y w allí, hallamos que la inversa de la transformación

$$z = \frac{i - w}{i + w} \qquad [1]$$

nos da un nuevo problema para V en un semiplano, indicado a la derecha en la Figura 98.

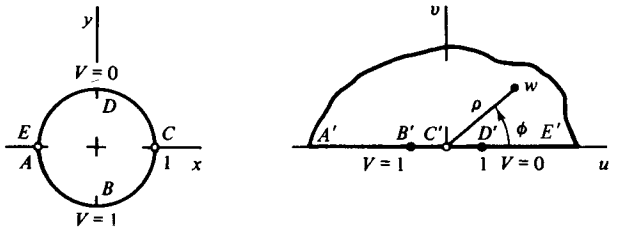


Figura 98

Ahora bien, la parte imaginaria de la función

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{Log} w = \frac{1}{\pi} \ln \rho + \frac{i}{\pi} \phi \qquad (\rho > 0,\ 0 \leqq \phi \leqq \pi) \qquad [2]$$

es una función acotada de u y de v que toma los requeridos valores constantes en las dos partes $\phi = 0$ y $\phi = \pi$ del eje u. Por tanto, la deseada función armónica para el semiplano es

$$V = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{v}{u}\right), \qquad [3]$$

donde los valores de la función arcotangente van de 0 a π.

La inversa de la transformación [1] es

$$w = i \frac{1 - z}{1 + z}, \qquad [4]$$

de donde u y v pueden ser expresadas en términos de x e y. La Ecuación [3] pasa a ser entonces

$$V = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{1 - x^2 - y^2}{2y}\right) \qquad (0 \leqq \operatorname{arctg} t \leqq \pi). \qquad [5]$$

La función [5] es la función potencial para el espacio encerrado por los electrodos cilíndricos, pues es armónica dentro del círculo y toma los valores adecuados sobre los semicírculos. Si deseamos comprobar que es solución, debemos notar que

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \operatorname{arctg} t = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{t \to 0 \\ t < 0}} \operatorname{arctg} t = \pi.$$

Las curvas equipotenciales $V(x, y) = c_1$ $(0 < c_1 < 1)$ en la región circular son arcos de los círculos

$$x^2 + (y + \operatorname{tg} \pi c_1)^2 = \sec^2 \pi c_1,$$

con cada círculo pasando por los puntos $(\pm 1, 0)$. Además, el segmento del eje x entre esos puntos es la equipotencial $V(x, y) = 1/2$. Una armónica conjugada U de V es $-(1/\pi) \ln \rho$, o sea, la parte imaginaria de la función $-(i/\pi)$ Log w. En vista de la Ecuación [4], U se puede escribir

$$U = -\frac{1}{\pi} \ln \left| \frac{1 - z}{1 + z} \right|.$$

De esta ecuación podemos ver que las líneas de flujo $U(x, y) = c_2$ son arcos de círculos centrados en el eje x. El segmento del eje y entre los electrodos es también una línea de flujo.

EJERCICIOS

1. La función armónica [3] de la Sección 83 es acotada en el semiplano $v \geqq 0$ y satisface las condiciones de contorno indicadas a la derecha en la Figura 98. Probar que si se añade a esa función la parte imaginaria de Ae^w, donde A es una constante real arbitraria, la función resultante satisface todos los requisitos, excepto la condición de acotación.

2. Probar que la transformación [4] de la Sección 83 aplica la mitad superior de la región circular que se ve a la izquierda en la Figura 98 sobre el primer cuadrante del plano w y el diámetro CE sobre el eje v positivo. Hallar a continuación el potencial electrostático V en el espacio encerrado por el semicilindro $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqq 0$ y el plano $y = 0$ cuando $V = 0$ sobre la superficie cilíndrica y $V = 1$ sobre la superficie plana (Fig. 99).

Sol. $V = \dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\dfrac{1 - x^2 - y^2}{2y} \right)$.

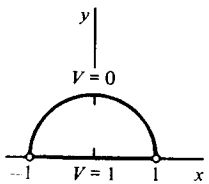


Figura 99

3. Hallar el potencial electrostático $V(r, \theta)$ en el espacio $0 < r < 1$, $0 < \theta < \pi/4$, limitado por los semiplanos $\theta = 0$ y $\theta = \pi/4$ y la porción $0 \leqq \theta \leqq \pi/4$ de la superficie cilíndrica $r = 1$, cuando $V = 1$ sobre las superficies planas y $V = 0$ sobre la cilíndrica. (Véase el Ejerc. 2). Comprobar que la función obtenida cumple las condiciones de contorno.

4. Nótese que todas las ramas de log z tienen la misma parte real, que es armónica en todo el plano, salvo en el origen. Escribir una expresión para el potencial electrostático $V(x, y)$ en el espacio entre dos superficies cilíndricas coaxiales conductoras $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = r_0^2$ $(r_0 \neq 1)$ si $V = 0$ sobre la primera superficie y $V = 1$ sobre la segunda.

Sol. $V = \dfrac{\ln (x^2 + y^2)}{2 \ln r_0}$.

5. Hallar el potencial electrostático acotado $V(x, y)$ en el espacio $y > 0$ limitado por un plano onductor infinito $y = 0$, una franja del cual $(-a < x < a, y = 0)$ está aislada del resto del plano y mantenida a potencial $V = 1$, mientras que $V = 0$ en el resto (Fig. 100). Verificar que la función obtenida satisface las condiciones de contorno.

Sol. $V = \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\dfrac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \right)$ $\quad (0 \leqq \operatorname{arctg} t \leqq \pi)$.

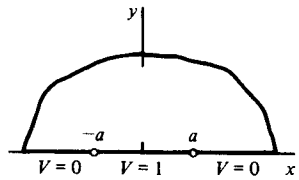


Figura 100

6. Deducir una expresión para el potencial electrostático en el espacio semiinfinito indicado en la Figura 101, limitado por dos semiplanos y un semicilindro, cuando $V = 1$ sobre la superficie cilíndrica y $V = 0$ sobre las superficies planas. Dibujar algunas curvas equipotenciales en el plano xy.

Sol. $V = \dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\dfrac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \right)$.

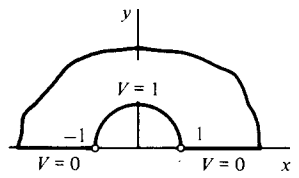


Figura 101

7. Hallar el potencial V en el espacio entre los planos $y = 0$ e $y = \pi$, cuando $V = 0$ sobre la parte de cada uno de esos planos en que $x > 0$, y $V = 1$ sobre las partes en que $x < 0$ (Fig. 102). Comprobar que el resultado cumple las condiciones de contorno.

Sol. $V = \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\dfrac{\operatorname{sen} y}{\operatorname{senh} x} \right)$ $\quad (0 \leqq \operatorname{arctg} t \leqq \pi)$.

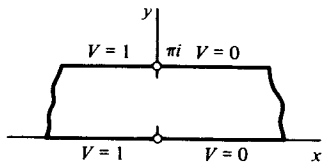


Figura 102

8. Deducir una expresión para el potencial electrostático V en el espacio interior a un largo cilindro $r = 1$ cuando $V = 0$ en el primer cuadrante ($r = 1, 0 < \theta < \pi/2$) de la superficie cilíndrica y $V = 1$ sobre el resto ($r = 1, \pi/2 < \theta < 2\pi$) de esa superficie. (Véase Ejerc. 15. Sec. 67, y la Fig. 67 allí.) Probar que $V = 3/4$ sobre el eje del cilindro. Comprobar en el resultado las condiciones de contorno.

9. Usando la Figura 20 del Apéndice 2, hallar una función temperatura $T(x, y)$ que sea armónica en el dominio en sombra que en ella se indica y que tome los valores $T = 0$ en el arco ABC y $T = 1$ en el segmento recto DEF. Verificar que la función obtenida satisface las condiciones de contorno requeridas. (Véase Ejerc. 2).

10. El problema de Dirichlet

$$V_{xx}(x, y) + V_{yy}(x, y) = 0 \quad (0 < x < a, 0 < y < b),$$
$$V(x, 0) = 0, \quad V(x, b) = 1 \quad (0 < x < a),$$
$$V(0, y) = V(a, y) = 0 \quad (0 < y < b)$$

para $V(x, y)$ en un rectángulo se puede resolver por el método de separación de variables*. La solución es

$$V = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{senh}(m\pi y/a)}{m \operatorname{senh}(m\pi b/a)} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \qquad (m = 2n - 1).$$

Aceptando ese resultado y adaptándolo al problema en el plano uv, hallar el potencial $V(r, \theta)$ en el espacio $1 < r < r_0$, $0 < \theta < \pi$ cuando $V = 1$ sobre la parte del contorno donde $\theta = \pi$ y $V = 0$ en el resto del contorno. (Véase Fig. 103.)

Sol. $$V = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{senh}(\alpha_n \theta)}{\operatorname{senh}(\alpha_n \pi)} \frac{\operatorname{sen}(\alpha_n \ln r)}{2n - 1} \left[\alpha_n = \frac{(2n - 1)\pi}{\ln r_0}\right].$$

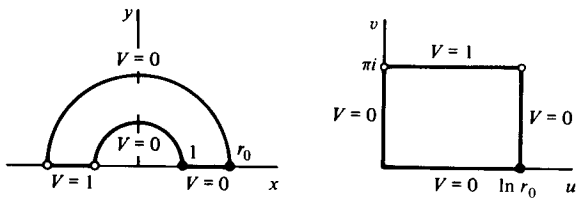


Figura 103. $w = \log z \quad \left(r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\right)$.

* Véase el libro del autor *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 4.ª ed. págs. 120-121 y 174-175, 1987.

11. Con ayuda de la solución del problema de Dirichlet para el rectángulo $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$, que se ha usado en el Ejercicio 10, hallar la función potencial $V(r, \theta)$ para el espacio $1 < r < r_0$, $0 < \theta < \pi$, cuando $V = 1$ en la porción de contorno $r = r_0$, o $< \theta < \pi$ y $V = 0$ en el resto del contorno (Fig. 104).

Sol. $$V = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r^m - r^{-m}}{r_0^m - r_0^{-m}}\right) \frac{\operatorname{sen} m\theta}{m} \qquad (m = 2n - 1).$$

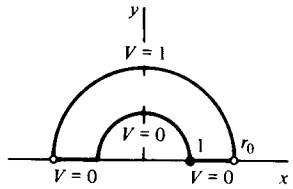


Figura 104

84. FLUJO DE UN FLUIDO BIDIMENSIONAL

Las funciones armónicas juegan un papel importante en hidrodinámica y aerodinámica. De nuevo, consideraremos sólo el caso bidimensional estacionario. En otras palabras, el movimiento del fluido se supone idéntico en todos los planos paralelos al plano xy, siendo su velocidad paralela a ese plano e independiente del tiempo. Es suficiente considerar, en tales circunstancias, el movimiento de una capa de fluido en el plano xy.

El vector representante del número complejo

$$V = p + iq$$

denotará la velocidad de una partícula del fluido en un punto cualquiera (x, y), de manera que las componentes x e y de la velocidad serán $p(x, y)$ y $q(x, y)$, respectivamente. En los puntos interiores a una región del fluido en la que no haya fuentes ni sumideros, las funciones reales $p(x, y)$, $q(x, y)$ y sus primeras derivadas parciales se suponen continuas.

La *circulación* del fluido a lo largo de un contorno C se define como la integral sobre C, con respecto a la longitud de arco σ, de la componente tangencial $V_T(x, y)$ de la velocidad:

$$\int_C V_T(x, y)\, d\sigma. \qquad [1]$$

El cociente entre la circulación a lo largo de C y la longitud de C es, por tanto, una medida de la velocidad media del fluido a lo largo de ese contorno. Se demuestra en cálculo avanzado que una tal integral puede expresarse*

* Las propiedades de las integrales que se van a utilizar en esta sección y en la siguiente se pueden consultar, por ejemplo, en el libro de W. Kaplan, *Advanced Mathematics for Engineers*, Capítulo 10, 1981.

$$\int_C V_T(x, y)\, d\sigma = \int_C p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy. \qquad [2]$$

Si C es un contorno cerrado simple orientado positivamente y contenido en un dominio simplemente conexo de flujo sin fuentes ni sumideros, el teorema de Green nos permite escribir

$$\int_C p(x, y)\, dx + q(x, y)\, dy = \iint_R [q_x(x, y) - p_y(x, y)]\, dx\, dy,$$

donde R es la región cerrada consistente en los puntos interiores a C y los propios puntos de C. Así pues,

$$\int_C V_T(x, y)\, d\sigma = \iint_R [q_x(x, y) - p_y(x, y)]\, dx\, dy \qquad [3]$$

para tal contorno.

Es fácil dar una interpretación física del integrando de la derecha en [3] para la circulación sobre un contorno cerrado simple C. Sea C un círculo de radio r centrado en el punto (x_0, y_0) y orientado positivamente. La velocidad media a lo largo de C se obtiene dividiendo la circulación por la circunferencia $2\pi r$, y la correspondiente velocidad angular media del fluido respecto del centro del círculo se obtiene dividiendo esa velocidad media por r:

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_R \frac{1}{2} [q_x(x, y) - p_y(x, y)]\, dx\, dy.$$

Pero esto no es sino una expresión del valor medio de la función

$$\omega(x, y) = \frac{1}{2} [q_x(x, y) - p_y(x, y)] \qquad [4]$$

sobre la región circular R delimitada por C. Su límite cuando r tiende a cero es el valor de ω en el punto (x_0, y_0). Luego la función $\omega(x, y)$, llamada *rotación* del fluido, representa la velocidad angular límite de un elemento circular del fluido cuando el círculo colapsa hacia su centro (x, y), el punto en el que se evalúa ω.

Si $\omega(x, y) = 0$ en todo punto de un dominio simplemente conexo, el flujo es *irrotacional* en ese dominio. Aquí consideramos sólo flujos irrotacionales, y suponemos además que el fluido es *incompresible* y *sin viscosidad*. Bajo nuestra hipótesis de flujo estacionario irrotacional de fluidos con densidad uniforme ρ, puede demostrarse que la presión del fluido $P(x, y)$ satisface el siguiente caso especial de la *ecuación de Bernoulli*:

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} |V|^2 = \text{constante}.$$

Obsérvese que la presión es máxima donde el valor absoluto de la velocidad $|V|$ es mínimo.

Sea D un dominio simplemente conexo en el que el flujo es irrotacional. Según la Ecuación [4], $p_y = q_x$ en D. Esta relación entre derivadas parciales implica que la integral

$$\int_C p(s, t)\, ds + q(s, t)\, dt$$

sobre un contorno C contenido completamente en D, que una dos puntos (x_0, y_0), (x, y) en D, es de hecho independiente del camino. Luego si (x_0, y_0) se mantiene fijo, la función

$$\phi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} p(s, t)\, ds + q(s, t)\, dt \qquad [5]$$

está bien definida sobre D, y tomando derivadas parciales en cada miembro de esta ecuación, encontramos que

$$\phi_x(x, y) = p(x, y), \quad \phi_y(x, y) = q(x, y). \qquad [6]$$

De [6] vemos que el vector velocidad $V = p + iq$ es el gradiente de ϕ; y la derivada direccional de ϕ en cualquier dirección representa la componente de la velocidad del flujo en esa dirección.

La función $\phi(x, y)$ se llama *potencial de velocidad*. De [5] resulta evidente que $\phi(x, y)$ cambia en una constante aditiva cuando se cambia el punto de referencia (x_0, y_0). Las curvas de nivel $\phi(x, y) = c_1$ se llaman *equipotenciales*. Por ser gradiente de ϕ, el vector velocidad V es normal a una equipotencial en cada punto en que V no sea cero.

Igual que en el caso del flujo de calor, la condición de que el fluido incompresible entre o salga de un elemento de volumen únicamente fluyendo a través de su frontera exige que $\phi(x, y)$ satisfaga la ecuación de Laplace

$$\phi_{xx}(x, y) + \phi_{yy}(x, y) = 0$$

en un dominio donde no haya fuentes ni sumideros. A la vista de [6] y de la continuidad de las funciones p y q, así como de sus primeras derivadas parciales, se sigue que las derivadas parciales de primer y segundo orden de ϕ son continuas en ese dominio. Por consiguiente, el potencial de velocidad ϕ es una función armónica en ese dominio.

85. LA FUNCION DE CORRIENTE

Según la Sección 84, el vector velocidad

$$V = p(x, y) + iq(x, y) \qquad [1]$$

para un dominio simplemente conexo en el que el flujo es irrotacional puede escribirse

$$V = \phi_x(x, y) + i\phi_y(x, y) = \text{grad } \phi(x, y), \qquad [2]$$

siendo ϕ el potencial de velocidades. Cuando el vector velocidad no es cero, es normal a una equipotencial que pasa por el punto (x, y). Además, si $\psi(x, y)$ denota una armónica conjugada de $\phi(x, y)$ (véase Sec. 75), el vector velocidad es tangente a una curva $\psi(x, y) = c_2$. Las curvas $\psi(x, y) = c_2$ se llaman *líneas de corriente* del fluido, y ψ se llama la *función de corriente*. En particular, un contorno a través del cual el fluido no puede fluir es una línea de corriente.

La función analítica

$$F(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

se llama el *potencial complejo* del flujo. Nótese que

$$F'(z) = \phi_x(x, y) + i\psi_x(x, y),$$

o sea, a la vista de las ecuaciones de Cauchy-Riemann,

$$F'(z) = \phi_x(x, y) - i\phi_y(x, y).$$

La expresión [2] para la velocidad se convierte, pues, en

$$V = \overline{F'(z)}. \qquad [3]$$

El módulo de la velocidad se obtiene escribiendo

$$|V| = |F'(z)|.$$

De acuerdo con la Ecuación [5], Sección 75, si ϕ es armónica en un dominio simplemente conexo D, una armónica conjugada de ϕ se puede expresar como

$$\psi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\phi_t(s, t)\, ds + \phi_s(s, t)\, dt,$$

donde la integración es independiente del camino. Con ayuda de las ecuaciones [6], Sección 84, podemos, por tanto, escribir

$$\psi(x, y) = \int_C -q(s, t)\, ds + p(s, t)\, dt, \qquad [4]$$

donde C es cualquier camino en D que va desde (x_0, y_0) hasta (x, y).

Ahora bien, se demuestra en cálculo avanzado que el lado derecho de [4] representa la integral sobre C, respecto de la longitud de arco σ, de la componente normal $V_N(x, y)$ del vector cuyas componentes x e y son $p(x, y)$ y $q(x, y)$, respectivamente. De modo que [4] admite la escritura

$$\psi(x, y) = \int_C V_N(s, t)\, d\sigma. \qquad [5]$$

Físicamente, por tanto, $\psi(x, y)$ representa el ritmo al que el flujo atraviesa C. Con más precisión, $\psi(x, y)$ denota el ritmo de flujo, por volumen, a través de una superficie de altura unidad colocada perpendicular al plano xy sobre la curva C.

Ejemplo. Si el potencial complejo es la función

$$F(z) = Az, \qquad [6]$$

donde A es una constante real positiva,

$$\phi(x, y) = Ax \quad \text{y} \quad \psi(x, y) = Ay. \qquad [7]$$

Las líneas de corriente $\psi(x, y) = c_2$ son las rectas horizontales $y = c_2/A$, y la velocidad en cualquier punto es

$$V = \overline{F'(z)} = A.$$

Aquí en cualquier punto (x_0, y_0) del eje x ocurre $\psi = 0$. Si se toma el punto (x_0, y_0) como origen, entonces $\psi(x, y)$ es el ritmo de flujo a través de cualquier contorno trazado desde el origen hasta el punto (x, y) (véase Fig. 105). El flujo es uniforme y hacia la derecha. Cabe interpretarlo como el flujo uniforme en el semiplano superior limitado por el eje x , que es una línea de corriente, o como flujo uniforme entre dos rectas paralelas $y = y_1$ e $y = y_2$.

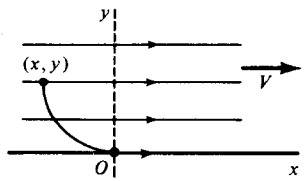


Figura 105

La función de corriente ψ caracteriza un flujo definido en una región. La cuestión de la unicidad de tal función, módulo una constante aditiva o un factor constante, no será tratada aquí. En algunos de los ejemplos que seguirán, donde la velocidad es uniforme lejos del obstáculo, o en el Capítulo 10, donde se consideran fuentes y sumideros, la situación física indica que el flujo queda unívocamente determinado por las condiciones dadas en el problema.

Una función armónica no siempre queda unívocamente determinada, ni si-

quiera módulo una constante aditiva o un factor constante, prefijando tan sólo sus valores sobre el contorno de una región. En el ejemplo precedente, la función $\psi(x, y) = Ay$ es armónica en el semiplano $y > 0$ y tiene valor nulo sobre el contorno. La función $\psi_1(x, y) = Be^x \operatorname{sen} y$ satisface también esas condiciones. No obstante, la línea de corriente $\psi_1(x, y) = 0$ consta no sólo de la recta $y = 0$, sino también de las rectas $y = n\pi$ ($n = 1, 2, \ldots$). Aquí $F_1(z) = Be^z$ es el potencial complejo para el flujo en una banda comprendida entre las rectas $y = 0$ e $y = \pi$, constituyendo ambas la línea de corriente $\psi_1(x, y) = 0$; si $B > 0$, el fluido fluye hacia la derecha a lo largo del contorno inferior y hacia la izquierda a lo largo del superior.

86. FLUJO EN TORNO A UNA ESQUINA Y A UN CILINDRO

Al analizar un flujo en el plano xy, o plano z, suele ser más sencillo considerar un flujo correspondiente en el plano uv, o plano w. Entonces, si ϕ es un potencial de velocidades y ψ una función de corriente para el flujo en el plano uv, los resultados de las Secciones 76 y 77 pueden ser aplicados a estas funciones armónicas. Es decir, cuando el dominio D_w del flujo en el plano uv es la imagen de un dominio D_z bajo la transformación

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

donde f es analítica, las funciones

$$\phi[u(x, y), v(x, y)], \quad \psi[u(x, y), v(x, y)]$$

son armónicas en D_z. Estas nuevas funciones pueden interpretarse como potencial de velocidades y función de corriente en el plano xy. Una línea de corriente o frontera natural $\psi(u, v) = c_2$ en el plano uv corresponde a una línea de corriente o frontera natural $\psi[u(x, y), v(x, y)] = c_2$ en el plano xy.

Al usar esta técnica, resulta con frecuencia más eficiente escribir primero la función potencial complejo para la región en el plano w, y obtener entonces de ella el potencial de velocidades y la función de corriente para la correspondiente región en el plano xy. Más precisamente, si la función potencial en el plano uv es

$$F(w) = \phi(u, v) + i\psi(u, v),$$

entonces la función compuesta

$$F[f(z)] = \phi[u(x, y), v(x, y)] + i\psi[u(x, y), v(x, y)]$$

es el deseado potencial complejo en el plano xy.

Con el fin de evitar exceso de notaciones, usaremos los mismos símbolos F, ϕ y ψ para el potencial complejo, etc., tanto en el plano xy como en el uv.

Ejemplo 1. Consideremos un flujo en el primer cuadrante $x > 0$, $y > 0$, que desciende paralelo al eje y pero se ve forzado a girar en una esquina situada en el origen, como muestra la Figura 106. Para determinar el flujo, recordemos (Sec. 70) que la transformación

$$w = z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

aplica el primer cuadrante sobre la mitad superior del plano uv, y su contorno sobre todo el eje u.

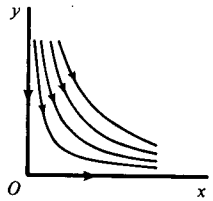


Figura 106

Del ejemplo de la Sección 85 sabemos que el potencial complejo para un flujo uniforme hacia la derecha en la mitad superior del plano w es $F = Aw$, donde A es una constante real positiva. Por tanto, el potencial en el cuadrante es

$$F = Az^2 = A(x^2 - y^2) + i2Axy; \qquad [1]$$

y se sigue que la función de corriente para el flujo es

$$\psi = 2Axy. \qquad [2]$$

Esta función es, claro está, armónica en el primer cuadrante, y se anula sobre el borde.

Las líneas de corriente son ramas de las hipérbolas rectangulares

$$2Axy = c_2.$$

Según la Ecuación [3], Sección 85, la velocidad del fluido es

$$V = \overline{2Az} = 2A(x - iy).$$

Nótese que el módulo de la velocidad

$$|V| = 2A\sqrt{x^2 + y^2}$$

de una partícula es directamente proporcional a su distancia al origen. El valor de la función de corriente [2] en un punto (x, y) puede interpretarse como el ritmo de flujo a través de un segmento recto que une el origen con ese punto.

Ejemplo 2. Sea un cilindro circular muy largo de radio unidad, colocado en el interior de una gran masa de fluido que se desplaza con velocidad uniforme, siendo el eje del cilindro perpendicular a la dirección del flujo. Para hallar el flujo estacionario en torno al cilindro, representamos el cilindro por el círculo $x^2 + y^2 = 1$ y tomamos el flujo distante de él como paralelo al eje x y hacia la derecha (Fig. 107). Por simetría, la parte del eje x exterior al círculo puede tratarse como borde, de modo que sólo es necesario considerar la parte superior de la figura como región del fluido.

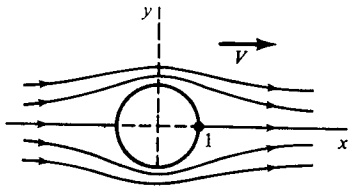


Figura 107

El borde de esa región, que consta del semicírculo superior y de las partes del eje x exteriores al círculo, se aplica sobre todo el eje u mediante la transformación

$$w = z + \frac{1}{z}.$$

La propia región se aplica sobre el semiplano superior $v \geqq 0$, como indica la Figura 17 del Apéndice 2. El potencial complejo para el correspondiente flujo uniforme en ese semiplano es $F = Aw$, donde A es una constante real positiva. Luego el potencial complejo para la región exterior al círculo y por encima del eje x es

$$F = A\left(z + \frac{1}{z}\right). \qquad [3]$$

La velocidad

$$V = A\left(1 - \frac{1}{\bar{z}^2}\right) \qquad [4]$$

tiende hacia A al crecer $|z|$. Así que el flujo es aproximadamente uniforme y paralelo al eje x en puntos distantes del círculo, como cabía esperar. De [4] vemos que $V(\bar{z}) = \overline{V(z)}$; por tanto, esa expresión representa también las velocidades del fluido en la región inferior, siendo el semicírculo inferior una línea de corriente.

De acuerdo con la Ecuación [3], la función de corriente para el problema dado es, en coordenadas polares,

$$\psi = A\left(r - \frac{1}{r}\right) \operatorname{sen} \theta. \qquad [5]$$

Las líneas de corriente

$$A\left(r - \frac{1}{r}\right) \operatorname{sen} \theta = c_2$$

son simétricas respecto del eje y, y tiene asíntotas paralelas al eje x. Téngase en cuenta que cuando $c_2 = 0$, la línea de corriente consiste en el círculo $r = 1$ y las partes del eje x exteriores al círculo.

EJERCICIOS

1. Argumentar por qué las componentes de la velocidad se pueden obtener de la función de corriente por medio de las ecuaciones

$$p(x, y) = \psi_y(x, y), \quad q(x, y) = -\psi_x(x, y).$$

2. En un punto interior de una región de fluido y bajo las condiciones que hemos supuesto, la presión del fluido no puede ser menor que la presión en todos los demás puntos de un entorno de dicho punto. Justificar esta firmación con ayuda de las Secciones 84, 85 y 42.

3. Para el flujo en torno a una esquina descrito en el Ejemplo 1, Sección 86, ¿en qué punto de la región $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, es máxima la presión del fluido?

4. Probar que la velocidad del fluido en los puntos de la superficie cilíndrica del Ejemplo 2, Sección 86, es $2A|\operatorname{sen} \theta|$ y que la presión del fluido sobre el cilindro es máxima en los puntos $z = \pm 1$ y mínima en $z = \pm i$.

5. Hallar el potencial complejo para el flujo en torno a un cilindro $r = r_0$, si la velocidad V en un punto z tiende a la constante real A cuando el punto se aleja del cilindro.

6. Hallar la función de corriente $\psi = Ar^4 \operatorname{sen} 4\theta$ para el flujo en la región angular $r \geqq 0$, $0 \leqq \theta \leqq \pi/4$ (Fig. 108), y esbozar algunas líneas de corriente en el interior de la citada región.

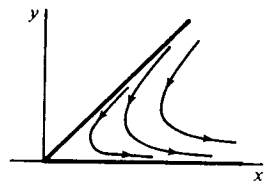


Figura 108

7. Obtener el potencial complejo $F = A$ sen z para un flujo dentro de la región semiinfinita $-\pi/2 \leqq x \leqq \pi/2$, $y \geqq 0$ (Fig. 109). Escribir las ecuaciones de las líneas de corriente.

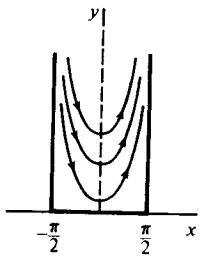


Figura 109

8. Demostrar que si el potencial de velocidades es $\phi = A \ln r$ $(A > 0)$ para un flujo en la región $r \geqq r_0$, las líneas de corriente son las semirrectas $r \geqq r_0$, $\theta = c$, y el ritmo de flujo hacia el exterior a través de cualquier círculo completo en torno al origen es $2\pi A$, correspondiente a una fuente de esa intensidad en el origen.

9. Hallar el potencial complejo $F = A(z^2 + z^{-2})$ para un flujo en la región $r \geqq 1$, $0 \leqq \theta \leqq \pi/2$. Escribir las expresiones de V y ψ. Nótese cómo varía la rapidez $|V|$ a lo largo del borde de la región, y comprobar que $\psi(x, y) = 0$ sobre el borde.

10. Supongamos que el flujo a distancia infinita del cilindro de radio unidad en el Ejemplo 2, Sección 86, es uniforme en una dirección que forma un ángulo α con el eje x; esto es,

$$\lim_{|z| \to \infty} V = A \exp(i\alpha) \qquad (A > 0).$$

Hallar el potencial complejo.

Sol. $F = A[z \exp(-i\alpha) + z^{-1} \exp(i\alpha)]$.

11. La transformación $z = w + (1/w)$ aplica el círculo $|w| = 1$ sobre el segmento recto que une los puntos $z = -2$ y $z = 2$, y el dominio exterior a ese círculo sobre el resto del plano z. [Véase Ejerc. 7, Sec. 10.] Escribamos

$$z - 2 = r_1 \exp(i\theta_1), \quad z + 2 = r_2 \exp(i\theta_2),$$

y

$$(z^2 - 4)^{1/2} = \sqrt{r_1 r_2} \exp \frac{i(\theta_1 + \theta_2)}{2} \qquad (0 \leqq \theta_1 < 2\pi, \, 0 \leqq \theta_2 < 2\pi);$$

la función $(z^2 - 4)^{1/2}$ es entonces univaluada y analítica en todas partes excepto en el corte de ramificación consistente en el segmento del eje x que une los puntos $z = \pm 2$. Probar que la inversa de la transformación $z = w + (1/w)$ tal que $|w| > 1$ para todo z que no esté en el corte, se puede expresar

$$w = \frac{1}{2}[z + (z^2 - 4)^{1/2}] = \frac{1}{4}\left(\sqrt{r_1} \exp \frac{i\theta_1}{2} + \sqrt{r_2} \exp \frac{i\theta_2}{2}\right)^2.$$

La transformación y su inversa establecen, por tanto, una correspondencia uno a uno entre los puntos de ambos dominios.

12. Con ayuda de los resultados de los Ejercicios 10 y 11, deducir la expresión

$$F = A[z \cos \alpha - i(z^2 - 4)^{1/2} \text{ sen } \alpha]$$

para el potencial complejo del flujo estacionario en torno a una larga placa de anchura 4 y cuya sección transversal es el segmento que une los puntos $z = +2$ en la Figura 110, en el supuesto de que la velocidad del fluido a distancia infinita de la placa es $A \exp(i\alpha)$. La rama de $(z^2 - 4)^{1/2}$ que se usa es la descrita en el Ejercicio 11, y $A > 0$.

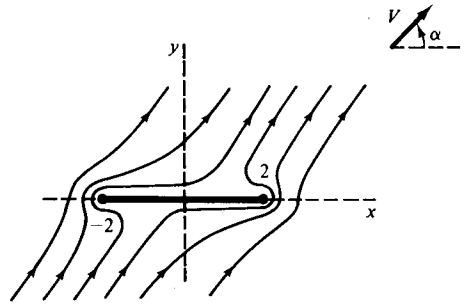


Figura 110

13. Probar que si sen $\alpha \neq 0$ en el Ejercicio 12, entonces la velocidad del fluido en el segmento recto que une los puntos $z = \pm 2$ es infinita en los extremos e igual a $A|\cos \alpha|$ en su punto medio.

14. Por sencillez, supongamos que $0 < \alpha \leqq \pi/2$ en el Ejercicio 12. Probar entonces que la velocidad del fluido a lo largo del borde superior del segmento que representa a la placa en la Figura 110 es cero en el punto $x = 2 \cos \alpha$, y que la velocidad en el borde inferior es cero en el punto $x = -2 \cos \alpha$.

15. Un círculo centrado en un punto x_0 $(0 < x_0 < 1)$ del eje x, y que pasa por el punto $z = -1$, se transforma bajo $w = z + (1/z)$. Puntos individuales no nulos $z = \exp(i\theta)$ pueden aplicarse añadiendo el vector $1/z = (1/r) \exp(-i\theta)$ al vector z. Comprobar, estudiando varios puntos, que la imagen del círculo es un perfil del tipo que muestra la Figura 111, y que los puntos exteriores al círculo se aplican sobre puntos exteriores

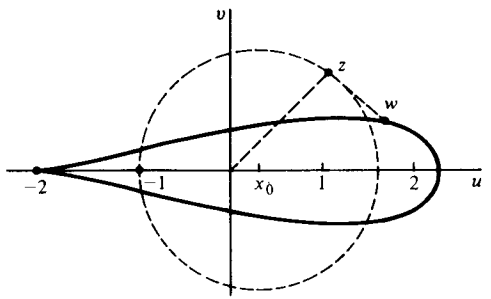


Figura 111

a ese perfil. Este es un caso especial del perfil de *ala de Joukowski*. (Véanse también los Ejerc. 16 y 17 aquí abajo).

16. *a*) Demostrar que la aplicación del círculo en el Ejercicio 15 es conforme salvo en $z = -1$.

b) Representemos por los números complejos

$$t = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{|\Delta z|}, \quad \tau = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{|\Delta w|}$$

vectores tangentes a un arco suave dirigido en $z = -1$ y al arco imagen, respectivamente, bajo la transformación $w = z + (1/z)$. Probar que $\tau = -t^2$ y que, en consecuencia, el perfil de Joukowski de la Figura 111 tiene una cúspide en el punto $w = -2$, siendo cero el ángulo entre las tangentes en esa cúspide.

17. La inversa de la transformación $w = z + (1/z)$ usada en el Ejercicio 15 viene dada, con z y w intercambiados, en el Ejercicio 11. Hallar el potencial complejo para el flujo en torno al ala del Ejercicio 15 cuando la velocidad V del fluido a distancia infinita del origen es una constante real A.

18. Nótese que bajo la transformación

$$w = e^z + z,$$

las mitades $x \leqq 0$ y $x \geqq 0$, de la recta $y = \pi$ se aplican sobre la semirrecta $u \leqq -1$, $v = \pi$. Análogamente, la recta $y = -\pi$ se aplica sobre la semirrecta $u \leqq 1$, $v = -\pi$; y la banda $-\pi \leqq y \leqq \pi$ sobre el plano w. Nótese asimismo que el cambio de direcciones, arg (dw/dz), bajo esa transformación tiende a cero cuando x tiende a $-\infty$. Demostrar que las líneas de flujo de un fluido a través del canal abierto formado por las semirrectas del plano w (Fig. 112) son las imágenes de las rectas $y = c_2$ en la banda. Estas líneas de corriente representan también las curvas equipotenciales del campo electrostático cerca del borde de un condensador de placas paralelas.

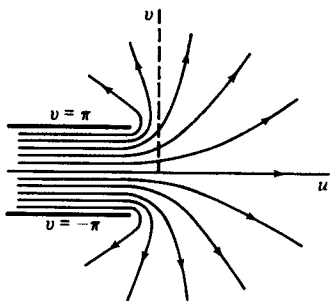


Figura 112

CAPITULO

DIEZ

LA TRANSFORMACION DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL

En este capítulo construimos una transformación, conocida como transformación de Schwarz-Christoffel, que aplica el eje x y la mitad superior del plano z sobre un polígono cerrado simple prefijado, y su interior sobre el plano w. Se utilizará para hallar la solución de ciertos problemas en teoría de fluidos y en teoría del potencial electrostático.

87. APLICACION DEL EJE REAL SOBRE UN POLIGONO

Representamos el vector unitario tangente a un arco suave C en un punto z_0 por el número complejo t. Denotemos por el número τ el vector unitario tangente a la imagen Γ de C en el punto w_0 correspondiente bajo la transformación $w = f(z)$. Suponemos que f es analítica en z_0 y que $f'(z_0) \neq 0$. De acuerdo con la Sección 73,

$$\arg \tau = \arg f'(z_0) + \arg t. \qquad [1]$$

En particular, si C es un segmento del eje x con sentido positivo hacia la derecha, entonces $t = 1$ y arg $t = 0$ en todo punto $z_0 = x$ sobre C. En ese caso, la Ecuación [1] se convierte en

$$\arg \tau = \arg f'(x). \qquad [2]$$

Si $f'(z)$ tiene un argumento constante a lo largo de ese segmento, arg τ es constante. Por tanto, la imagen Γ de C es también un segmento recto.

Construyamos ahora una transformación $w = f(z)$ que aplica el eje x sobre un polígono de n lados, donde $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, e ∞ son los puntos de ese eje cuyas imágenes van a ser los vértices del polígono, y donde

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_{x-1}.$$

Los vértices son los puntos $w_j = f(x_j)$ $(j = 1, 2, ..., n - 1)$ y $w_n = f(\infty)$. La función f ha de ser tal que $\arg f(z)$ salte de un valor constante a otro en los puntos $z = x_j$ cuando el punto z recorre el eje x (Fig. 113).

Si la función f se escoge como

$$f'(z) = A(z - x_1)^{-k_1}(z - x_2)^{-k_2} \cdots (z - x_{n-1})^{-k_{n-1}}, \qquad [3]$$

donde A es una constante compleja y cada k_j es una constante real, el argumento de la derivada [3] se puede expresar

$$\arg f'(z) = \arg A - k_1 \arg(z - x_1) - k_2 \arg(z - x_2) - \cdots k_{n-1} \arg(z - x_{n-1}). \qquad [4]$$

Si $z = x$ y $x < x_1$,

$$\arg (z - x_1) = \arg (z - x_2) = \cdots = \arg (z - x_{n-1}) = \pi.$$

Cuando $x_1 < x < x_2$, $\arg (z - x_1) = 0$ y cada uno de los demás argumentos es π. Según [4], en tal caso $\arg f(z)$ crece en un ángulo $k_1\pi$ al moverse z hacia la derecha cuando pasa por el punto $z = x_1$. Salta de nuevo su valor en la cantidad $k_2\pi$ cuando z pasa por el punto x_2, etc.

A la vista de [2], el vector unitario τ es constante en dirección mientras z va desde x_{j-1} hasta x_j; así que w se mueve en esa dirección fija por una recta. La dirección de τ cambia bruscamente, en un ángulo $k_j\pi$, en el punto imagen w_j de x_j, tal como muestra la Figura 113. Esos ángulos $k_j\pi$ son los ángulos exteriores del polígono descrito por el punto w.

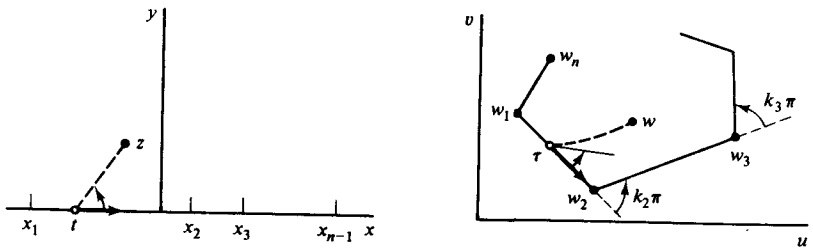


Figura 113

Los ángulos exteriores pueden mantenerse entre $-\pi$ y π; es decir, $-1 < k_j < 1$. Suponemos que los lados del polígono nunca se cruzan unos con otros y que se asigna al polígono una orientación positiva (contraria a las agujas de un reloj). La suma de los ángulos exteriores de un polígono *cerrado* es, entonces, 2π; y el ángulo exterior en el vértice w_n, que es la imagen del punto $z = \infty$, se puede escribir

$$k_n\pi = 2\pi - (k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1})\pi.$$

Así que los números k_j deben satisfacer necesariamente las condiciones

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} + k_n = 2, \quad -1 < k_j < 1 \qquad (j = 1, 2, ..., n). \qquad [5]$$

Nótese que $k_n = 0$ si

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_{n-1} = 2. \qquad [6]$$

En ese caso, la dirección de τ no cambia en el punto w_n. De manera que w_n no es un vértice, y el polígono tiene $n - 1$ lados.

La existencia de una función f cuya derivada venga dada por [3] se probará a continuación.

88. LA TRANSFORMACION DE SCHWARZ-CHRISTOFFEL

En nuestra expresión (Sec. 87)

$$f'(z) = A(z - x_1)^{-k_1}(z - x_2)^{-k_2} \cdots (z - x_{n-1})^{-k_{n-1}} \qquad [1]$$

para la derivada de una función que ha de aplicar el eje x sobre un polígono, sean los factores $(z - x_j)^{-k_j}$ ramas de las funciones potencias con cortes de ramificación localizados por debajo del eje x. Más concretamente, sean

$$(z - x_j)^{-k_j} = |z - x_j|^{-k_j} \exp(-ik_j\theta_j) \qquad \left(-\frac{\pi}{2} < \theta_j < \frac{3\pi}{2}\right), \qquad [2]$$

donde $\theta_j = \arg (z - x_j)$ y $j = 1, 2, ..., n - 1$. Entonces $f'(z)$ es analítica en todo el semiplano $y \geqq 0$, excepto en los $n - 1$ puntos de ramificación x_j.

Si z_0 es un punto en esa región de analiticidad, denotada por R, entonces la función

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f'(s)\, ds \qquad [3]$$

es univaluada y analítica en esa misma región, siendo el camino de integración desde z_0 hasta z para cualquier contorno contenido en R. Además, $F'(z) = f'(z)$ (véase Sec. 34).

Para definir la función F en el punto $z = x_1$ de modo que sea continua allí, notemos que $(z - x_1)^{-k_1}$ es el único factor en [1] que no es analítico en x_1. En consecuencia, si $\phi(z)$ denota el producto del resto de los factores en esa expresión, $\phi(z)$ es analítica en x_1 y se representa en el disco abierto $|z - x_1| < R_1$ por su serie de Taylor centrada en x_1. Así que

$$f'(z) = (z - x_1)^{-k_1}\phi(z) = (z - x_1)^{-k_1}\left[\phi(x_1) + \frac{\phi'(x_1)}{1!}(z - x_1) + \frac{\phi''(x_1)}{2!}(z - x_1)^2 + \cdots\right],$$

o sea

$$f'(z) = \phi(x_1)(z - x_1)^{-k_1} + (z - x_1)^{1-k_1}\psi(z) \qquad [4]$$

donde ψ es analítica y, por tanto, continua en todo el disco abierto. Como $1 - k_1 > 0$, el último término de la derecha en [4] representa una función continua de z en la mitad superior del disco, donde $\text{Im}\, z \geqq 0$, si asignamos a ese término el valor cero en $z = x_1$. Deducimos que la integral

$$\int_{z_1}^{z} (s - x_1)^{1-k_1}\psi(s)\, ds$$

del último término a lo largo de un camino desde Z_1 hasta z, cuando Z_1 y el camino están en ese semidisco, es una función continua de z en $z = x_1$. La integral

$$\int_{z_1}^{z} (s - x_1)^{-k_1}\, ds = \frac{1}{1 - k_1}\left[(z - x_1)^{1-k_1} - (Z_1 - x_1)^{1-k_1}\right]$$

sobre el mismo camino representa también una función continua de z en x_1, si definimos el valor de la integral allí como su límite cuando z tiende a x_1 por el semidisco. La integral de la función [4] a lo largo del camino citado desde Z_1 hasta z es, en consecuencia, continua en $z = x_1$; y lo mismo es cierto para [3], ya que se puede escribir como una integral sobre un camino en R desde z_0 hasta Z_1 más la integral desde Z_1 hasta z.

Los argumentos anteriores se aplican a cada uno de los $n - 1$ puntos x_j, de modo que F es continua en la región $y \geqq 0$.

De la Ecuación [1] podemos concluir que, para un número real R positivo suficientemente grande, existe una constante positiva M tal que si $\text{Im}\, z \geqq 0$, entonces

$$|f'(z)| < \frac{M}{|z|^{2-k_n}} \quad \text{si} \quad |z| > R. \qquad [5]$$

Como $2 - k_n > 1$, esta propiedad de orden del integrando en la Ecuación [3] asegura la existencia del límite de la integral que figura en ella al tender z hacia infinito; es decir, existe un número M_n tal que

$$\lim_{z \to \infty} F(z) = W_n \qquad (\text{Im}\, z \geqq 0). \qquad [6]$$

Los detalles del argumento se relegan a los Ejercicios 10 y 11, Sección 90.

Nuestra función, cuya derivada viene dada por [1], puede escribirse $f(z) = F(z) + B$, siendo B una constante compleja. La tansformación resultante,

$$w = A \int_{z_0}^{z} (s - x_1)^{-k_1}(s - x_2)^{-k_2} \cdots (s - x_{n-1})^{-k_{n-1}}\, ds + B, \qquad [7]$$

es la transformación de Schwarz-Christoffel, así llamada en honor de los matemáticos alemanes H. A. Schwarz (1843-1921) y E. B. Christoffel (1829-1900), quienes la descubrieron independientemente.

La transformación [7] es continua en el semiplano $y \geqq 0$ y es conforme en él, salvo en los puntos x_j. Hemos supuesto que los números k_j satisfacen las condiciones [5], Sección 87. Asimismo, suponemos que las constantes x_j y k_j son tales que los lados del polígono no se cruzan, esto es, el polígono es un contorno cerrado simple. Entonces, de acuerdo con la Sección 87, al recorrer z el eje x en la dirección positiva, su imagen w describe el polígono P en sentido positivo, y existe una correspondencia uno a uno entre los puntos del eje y los de P. Según [6], la imagen w_n del punto $z = \infty$ existe, y es $w_n = W_n + B$.

Si z es un punto interior al semiplano superior $y \geqq 0$ y x_0 es cualquier punto del eje x distinto de los x_j, el ángulo que va desde el vector t en x_0 hasta el segmento recto que une x_0 con z, es positivo y menor que π (Fig. 113). En la imagen w_0 de x_0, el ángulo correspondiente desde el vector τ hasta la imagen del segmento recto que une x_0 con z tiene el mismo valor. Luego las imágenes de puntos interiores del semiplano están a la izquierda de los lados del polígono, recorrido en sentido positivo (contrario al de las agujas de un reloj). Dejamos al lector la demostración de que la transformación establece una correspondencia uno a uno entre los puntos interiores del semiplano y los puntos interiores al polígono (Ejerc. 12, Sec. 90).

Dado un polígono específico P, examinemos el número de constantes a determinar en la transformación de Schwarz-Christoffel para aplicar el eje x sobre P. A tal fin, podemos tomar $z_0 = 0$, $A = 1$ y $B = 0$, y exigir simplemente que el eje x se aplique sobre algún polígono P' similar a P. El tamaño y la posición de P' se pueden ajustar para que coincidan con los de P introduciendo las constantes apropiadas A y B.

Los números k_j se determinan todos a partir de los ángulos exteriores en los vértices de P. Quedan por elegir las $n - 1$ constantes x_j. La imagen del eje x es algún polígono P' con los mismos ángulos que P. Pero si P' ha de ser similar a P, entonces $n - 2$ lados conectados han de tener una razón común con los lados correspondientes de P; esta condición se expresa en $n - 3$ ecuaciones en las $n - 1$ incógnitas reales x_j. Así pues, *dos de los números x_j, o sea, dos relaciones entre ellos, pueden escogerse arbitrariamente*, en el supuesto de que las $n - 3$ ecuaciones en las restantes $n - 3$ incógnitas tengan soluciones con valores reales.

Cuando el punto cuya imagen es el vértice w_n no es el punto del infinito sino un punto finito $z = x_n$ del eje x, se desprende de la Sección 87 que la transformación de Schwarz-Christoffel adopta la forma

$$w = A \int_{z_0}^{z} (s - x_1)^{-k_1}(s - x_2)^{-k_2} \cdots (s - x_n)^{-k_n}\, ds + B, \qquad [8]$$

donde $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = 2$. Los exponentes k_j se determinan a partir de los ángulos exteriores del polígono. Ahora bien, en este caso, hay n constantes reales x_j que deben cumplir las antedichas $n - 3$ ecuaciones. De manera que *tres de los números x_j, o sea, tres condiciones sobre esos n números, se pueden elegir arbitrariamente* en la transformación [8] del eje x sobre un polígono dado.

89. TRIANGULOS Y RECTANGULOS

La transformación de Schwarz-Christoffel se escribe en términos de los puntos x_j y no en términos de sus imágenes, los vértices del polígono. Sólo tres de esos puntos pueden tomarse arbitrariamente, de modo que si el polígono dado tiene más de tres lados, algunos de los puntos x_j han de ser calculados con el fin de lograr que el polígono dado, u otro similar a él, sea la imagen del eje x. La selección de las condiciones que permitan determinar esas constantes, las condiciones que conviene utilizar, requiere con frecuencia una cierta dosis de ingenio.

Otra limitación en el uso de la transformación se debe a la integración que conlleva. A menudo la integral no se puede evaluar en términos de un número finito de funciones, elementales. En tales circunstancias, la solución de problemas por medio de la transformación puede convertirse en algo muy complicado.

Si el polígono es un triángulo con vértices en los puntos w_1, w_2 y w_3 (Fig. 114), la transformación puede formularse como

$$w = A \int_{z_0}^{z} (s - x_1)^{-k_1}(s - x_2)^{-k_2}(s - x_3)^{-k_3}\, ds + B, \qquad [1]$$

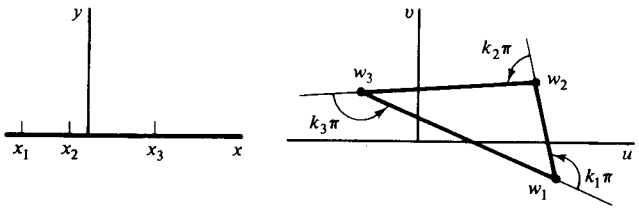


Figura 114

con $k_1 + k_2 + k_3 = 2$. En términos de los ángulos interiores θ_j,

$$k_j = 1 - \frac{1}{\pi}\theta_j \qquad (j = 1, 2, 3).$$

Aquí hemos tomado los tres puntos x_j como puntos finitos del eje x. Cabe asignarles valores arbitrarios. Las constantes complejas A y B, que están asociadas al tamaño y a la posición del triángulo, se pueden determinar de manera tal que el semiplano superior se aplique sobre la región triangular dada.

Si tomamos el vértice w_3 como la imagen del punto del infinito, la transformación se convierte en

$$w = A \int_{z_0}^{z} (s - x_1)^{-k_1}(s - x_2)^{-k_2}\, ds + B, \qquad [2]$$

donde se pueden asignar valores cualesquiera a x_1 y x_2.

Las integrales en [1] y [2] no representan funciones elementales a menos que

el triángulo sea degenerado, con uno o dos de sus vértices en el infinito. La integral en [2] es una *integral elíptica* cuando el triángulo es equilátero o cuando es un triángulo rectángulo con uno de sus ángulos igual a $\pi/3$ o $\pi/4$.

Ejemplo 1. Para un triángulo equilátero, $k_1 = k_2 = k_3 = 2/3$. Conviene poner $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ y $x_3 = \infty$ y usar la Ecuación [2], con $z_0 = 1$, $A = 1$ y $B = 0$. Con ello, la transformación queda

$$w = \int_1^z (s + 1)^{-2/3}(s - 1)^{-2/3}\, ds. \qquad [3]$$

La imagen del punto $z = 1$ es claramente $w = 0$, es decir, $w_2 = 0$. Cuando $z = -1$ en la integral, podemos escribir $s = x$, donde $-1 < x < 1$. Entonces $x + 1 > 0$ y $\arg(x + 1) = 0$, mientras que $|x - 1| = 1 - x$ y $\arg(x - 1) = \pi$. Luego

$$\begin{aligned} w &= \int_1^{-1} (x + 1)^{-2/3}(1 - x)^{-2/3} \exp\left(-\frac{2\pi i}{3}\right) dx = \\ &= \exp\left(\frac{\pi i}{3}\right) \int_0^1 \frac{2\, dx}{(1 - x^2)^{2/3}}. \end{aligned} \qquad [4]$$

Con la sustitución $x = \sqrt{t}$, la última integral se reduce a un caso especial de la que se usa en la definición de la función beta (Ejerc. 18, Sec. 61). Sea b su valor, que es positivo:

$$b = \int_0^1 \frac{2\, dx}{(1 - x^2)^{2/3}} = \int_0^1 t^{-1/2}(1 - t)^{-2/3}\, dt = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right). \qquad [5]$$

El vértice w_1 es, por tanto, el punto (Fig. 115)

$$w_1 = b \exp \frac{\pi i}{3}. \qquad [6]$$

El vértice w_3 está en el eje x positivo, porque

$$w_3 = \int_1^{\infty} (x + 1)^{-2/3}(x - 1)^{-2/3}\, dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 1)^{2/3}}.$$

Pero el valor de w_3 viene, asimismo, representado por la integral [3] cuando z tiende a infinito a lo largo del eje x negativo; es decir,

$$\begin{aligned} w_3 = &\int_1^{-1} (|x + 1||x - 1|)^{-2/3} \exp\left(-\frac{2\pi i}{3}\right) dx + \\ &+ \int_{-1}^{-\infty} (|x + 1||x - 1|)^{-2/3} \exp\left(-\frac{4\pi i}{3}\right) dx. \end{aligned}$$

A la vista de la primera de las expresiones [4] para w_1,

$$w_3 = w_1 + \exp\left(-\frac{4\pi i}{3}\right)\int_{-1}^{-\infty} (|x+1||x-1|)^{-2/3}\,dx =$$

$$= b\exp\frac{\pi i}{3} + \exp\left(-\frac{\pi i}{3}\right)\int_1^{\infty}\frac{dx}{(x^2-1)^{2/3}},$$

o sea

$$w_3 = b\exp\frac{\pi i}{3} + w_3\exp\left(-\frac{\pi i}{3}\right).$$

Despejando w_3, vemos que

$$w_3 = b. \qquad [7]$$

Hemos comprobado así que la imagen del eje x es el triángulo equilátero de lado b que muestra la Figura 115. Podemos ver también que $w = (b/2)\exp(\pi i/3)$ cuando $z = 0$.

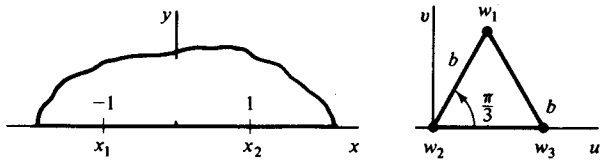


Figura 115

Si el polígono es un rectángulo, todo $k_j = 1/2$. Si elegimos ± 1 y $\pm a$ como los puntos x_j cuyas imágenes son los vértices, y escribimos

$$g(z) = (z+a)^{-1/2}(z+1)^{-1/2}(z-1)^{-1/2}(z-a)^{-1/2}, \qquad [8]$$

con $0 \leqq \arg(z - x_j) \leqq \pi$, la transformación de Schwarz-Christoffel pasa a ser

$$w = -\int_0^z g(s)\,ds, \qquad [9]$$

salvo una transformación $W = Aw + B$ para ajustar el tamaño y la posición al rectángulo. La integral [9] es una constante por la integral elíptica

$$\int_0^z (1-s^2)^{-1/2}(1-k^2s^2)^{-1/2}\,ds \qquad \left(k = \frac{1}{a}\right);$$

pero la forma [8] del integrando indica más nítidamente las ramas de las funciones potencia implicadas.

Ejemplo 2. Localicemos los vértices del rectángulo cuando $a > 1$. Como se ve en la Figura 116, $x_1 = -a$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ y $x_4 = a$. Los cuatro vértices se pueden describir en términos de dos números positivos b y c que dependen del valor de a del modo siguiente:

$$b = \int_0^1 |g(x)|\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(a^2-x^2)}}, \qquad [10]$$

$$c = \int_1^a |g(x)|\,dx = \int_1^a \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(a^2-x^2)}}. \qquad [11]$$

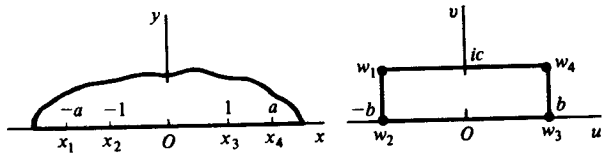


Figura 116

Si $-1 < x < 0$, entonces

$$\arg(x+a) = \arg(x+1) = 0 \quad \text{y} \quad \arg(x-1) = \arg(x-a) = \pi;$$

por tanto,

$$g(x) = \left[\exp\left(-\frac{\pi i}{2}\right)\right]^2 |g(x)| = -|g(x)|.$$

Si $-a < x < -1$, entonces $g(x) = [\exp(-\pi i/2)]^3|g(x)| = i|g(x)|$. Así pues,

$$w_1 = -\int_0^{-a} g(x)\,dx = -\int_0^{-1} g(x)\,dx - \int_{-1}^{-a} g(x)\,dx$$

$$= \int_0^{-1} |g(x)|\,dx - i\int_{-1}^{-a} |g(x)|\,dx = -b + ic.$$

Se deja para los ejercicios la demostración de que

$$w_2 = -b, \quad w_3 = b, \quad w_4 = b + ic. \qquad [12]$$

La posición y las dimensiones del rectángulo se muestran en la Figura 116.

90. POLIGONOS DEGENERADOS

Aplicaremos ahora la transformación de Schwarz-Christoffel a algunos polígonos degenerados para los cuales las integrales representan funciones elementales.

Para facilitar el desarrollo, los ejemplos utilizados llevan a transformaciones que ya han aparecido en el Capítulo 7.

Ejemplo 1. Apliquemos el semiplano $y \geqq 0$ sobre la banda semiinfinita

$$-\frac{\pi}{2} \leqq u \leqq \frac{\pi}{2}, \quad v \geqq 0.$$

Consideramos la banda como la forma límite de un triángulo con vértices w_1, w_2 y w_3 (Fig. 117) al tender a infinito la parte imaginaria de w_3.

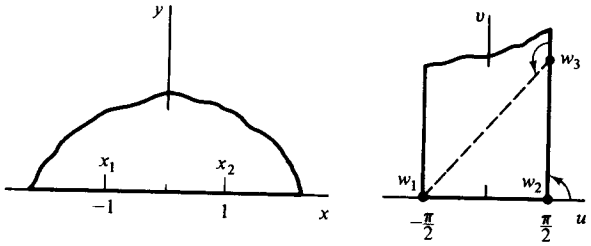


Figura 117

Los valores límite de los ángulos exteriores son

$$k_1\pi = k_2\pi = \frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad k_3\pi = \pi.$$

Escogemos los puntos $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ y $x_3 = \infty$ como aquellos cuyas imágenes son los vértices. Entonces la derivada de la función que define la aplicación es

$$\frac{dw}{dz} = A(z + 1)^{-1/2}(z - 1)^{-1/2} = A'(1 - z^2)^{-1/2}.$$

Por tanto, $w = A' \operatorname{sen}^{-1} z + B$. Si escribimos $A' = 1/a$ y $B = b/a$, se deduce que

$$z = \operatorname{sen}(aw - b).$$

Esta transformación del plano w al plano z satisface las condiciones $z = -1$ cuando $w = -\pi/2$ y $z = 1$ cuando $w = \pi/2$ si $a = 1$ y $b = 0$. La transformación resultante es

$$z = \operatorname{sen} w,$$

que, como vimos en la Sección 69, aplica la banda sobre el semiplano.

Ejemplo 2. Consideremos la franja $0 < v < \pi$ como la forma límite de un rombo con vértices en los puntos $w_1 = \pi i$, w_2, $w_3 = 0$ y w_4 cuando w_2 y w_4 se alejan hacia el infinito por la izquierda y por la derecha, respectivamente (Fig. 118). En el límite, los ángulos exteriores se convierten en

$$k_1\pi = 0, \quad k_2\pi = \pi, \quad k_3\pi = 0, \quad k_4\pi = \pi.$$

Dejamos x_1 sin determinar y elegimos los valores $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ y $x_4 = \infty$. La derivada de la función que da la transformación de Schwarz-Christoffel es entonces

$$\frac{dw}{dz} = A(z - x_1)^0 z^{-1}(z - 1)^0 = \frac{A}{z};$$

luego

$$w = A \operatorname{Log} z + B.$$

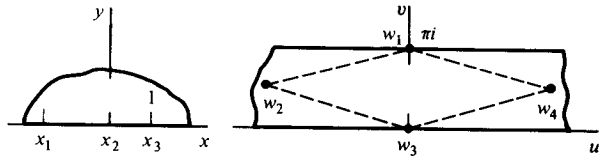


Figura 118

Ahora $B = 0$ porque $w = 0$ cuando $z = 1$. La constante A ha de ser real, ya que el punto w está en el eje real cuando $z = x$ y $x > 0$. El punto $w = \pi i$ es la imagen del punto $z = x_1$, donde x_1 es un número negativo; por tanto,

$$\pi i = A \operatorname{Log} x_1 = A \ln |x_1| + A\pi i.$$

Identificando partes real e imaginaria aquí vemos que $|x_1| = 1$ y $A = 1$. Así que la transformación pasa a ser

$$w = \operatorname{Log} z;$$

además $x_1 = -1$. Ya sabemos, por la discusión que siguió al Ejemplo 2 en la Sección 68, que esta transformación aplica el semiplano sobre la franja.

El procedimiento empleado en estos dos ejemplos no es riguroso, ya que los valores límites de ángulos y coordenadas no se han tratado de forma ortodoxa. Los valores límites se han utilizado siempre que ha parecido oportuno hacerlo. Ahora bien, si al final verificamos la aplicación obtenida, no es esencial que justifiquemos los pasos en su deducción. El método formal usado aquí es más breve y menos tedioso que el estrictamente riguroso.

EJERCICIOS

1. En la transformación [1], Sección 89, hagamos $B = z_0 = 0$ y

$$A = \exp\frac{3\pi i}{4}, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1,$$

$$k_1 = \frac{3}{4}, \quad k_2 = \frac{1}{2}, \quad k_3 = \frac{3}{4}$$

para aplicar el eje x sobre un *triángulo rectángulo isósceles*. Probar que los vértices de ese triángulo son los puntos

$$w_1 = bi, \quad w_2 = 0 \quad \text{y} \quad w_3 = b,$$

siendo b la constante positiva

$$b = \int_0^1 (1 - x^2)^{-3/4} x^{-1/2}\, dx.$$

Probar, asimismo, que $2b = B(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, donde B es la función beta.

2. Obtener las expresiones [12] de la Sección 89 para el resto de los vértices del rectángulo que muestra la Figura 116.

3. Demostrar que si $0 < a < 1$ en las ecuaciones [8] y [9] de la Sección 89, los vértices del rectángulo son los que indica la Figura 116, donde b y c toman ahora los valores

$$b = \int_0^a |g(x)|\, dx, \quad c = \int_a^1 |g(x)|\, dx.$$

4. Probar que el caso especial

$$w = i\int_0^z (s + 1)^{-1/2}(s - 1)^{-1/2} s^{-1/2}\, ds$$

de la transformación de Schwarz-Christoffel [7], Sección 88, aplica el eje x sobre el *cuadrado* con vértices en

$$w_1 = bi, \quad w_2 = 0, \quad w_3 = b, \quad w_4 = b + ib,$$

donde el número positivo b viene dado en términos de la función beta:

$$b = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

5. Usar la transformación de Schwarz-Christoffel para llegar a la transformación $w = z^m$ $(0 < m < 1)$, que aplica el semiplano $y \geqq 0$ sobre la región angular $|w| \geqq 0$, $0 \leqq \arg w \leqq m\pi$ y transforma el punto $z = 1$ en el punto $w = 1$. Considérese la región angular como límite de la triangular que muestra la Figura 119 al tender el ángulo α hacia 0.

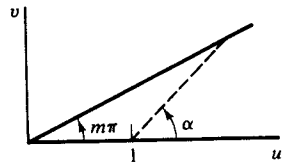


Figura 119

6. Refiriéndonos a la Figura 26, Apéndice 2, cuando el punto z se mueve hacia la derecha por el eje real negativo, w se mueve hacia la derecha por todo el eje u. Si z describe el segmento $0 \leqq x \leqq 1$ del eje real, su imagen w se desplaza hacia la izquierda por la semirrecta $u \geqq 1$, $v = \pi i$; y al moverse z hacia la derecha por la parte del eje x en que $x \geqq 1$, su imagen w va hacia la derecha a lo largo de la misma semirrecta $u \geqq 1$, $v = \pi i$. Nótense los cambios de dirección en el movimiento de w en las imágenes de los puntos $z = 0$ y $z = 1$. Estos cambios sugieren que la derivada de una función que defina la aplicación deseada habría de ser

$$f'(z) = A(z - 0)^{-1}(z - 1),$$

donde A es alguna constante. Obtenemos así formalmente la función

$$w = \pi i + z - \operatorname{Log} z,$$

que, como se puede comprobar, aplica el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ tal como indica la figura.

7. Si z se mueve hacia la derecha por la parte del eje real negativo en la que $x \leqq -1$, su imagen ha de moverse hacia la derecha por el eje real negativo del plano w. Si z se mueve hacia la derecha a lo largo del segmento real $-1 \leqq x \leqq 0$ y después por el segmento $0 \leqq x \leqq 1$, su punto imagen w ha de moverse en la dirección de v creciente por el segmento $0 \leqq v \leqq 1$ del eje v y después en la dirección de v decreciente por ese mismo segmento. Finalmente, al desplazarse z hacia la derecha por la parte $x \geqq 1$ del eje real, su imagen ha de moverse hacia la derecha a lo largo del eje real positivo en el plano w. Nótense los cambios de dirección del movimiento de w en las imágenes de los puntos $z = -1$, $z = 0$ y $z = 1$. Resulta apropiada, en consecuencia, una función cuya derivada sea

$$f'(z) = A(z + 1)^{-1/2}(z - 0)^{1}(z - 1)^{-1/2},$$

donde A es una constante. Obtenemos formalmente la función

$$w = \sqrt{z^2 - 1},$$

con $0 < \arg\sqrt{z^2 - 1} < \pi$. Considerando las aplicaciones sucesivas $Z = z^2$, $W = Z - 1$ y $w = \sqrt{W}$, verificar que la transformación resultante aplica el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$ sobre el semiplano $\operatorname{Im} w > 0$, con un corte a lo largo del segmento $0 \leqq v \leqq 1$ del eje v.

8. La inversa de la transformación racional lineal

$$Z = \frac{i - z}{i + z}$$

aplica el disco unidad $|Z| \leqq 1$ de manera conforme, excepto en el punto $Z = -1$, sobre el semiplano Im $z \geqq 0$ (véase Fig. 13 en el Apéndice 2). Sean Z_j los puntos del círculo $|Z| = 1$ cuyas imágenes son los puntos $z = x_j$ $(j = 1, 2, ..., n)$ usados en la transformación de Schwarz-Christoffel [8] de la Sección 88. Demostrar formalmente, sin determinar las ramas de las funciones potencia, que

$$\frac{dw}{dZ} = A'(Z - Z_1)^{-k_1}(Z - Z_2)^{-k_2} \cdots (Z - Z_n)^{-k_n},$$

donde A' es una constante. Probar así que la *transformación*

$$w = A' \int_0^z (S - Z_1)^{-k_1}(S - Z_2)^{-k_2} \cdots (S - Z_n)^{-k_n} dS + B$$

aplica el interior del círculo $|Z| = 1$ *sobre el interior de un polígono* cuyos vértices son las imágenes de los puntos Z_j del círculo.

9. En la integral del Ejercicio 8, sean Z_j $(j = 1, 2, ..., n)$ las raíces n-ésimas de la unidad. Escribamos $\omega = \exp(2\pi i/n)$ y $Z_1 = 1, Z_2 = \omega, ..., Z_n = \omega^{n-1}$. Hagamos todos los números k_j $(j = 1, 2, ..., n)$ iguales a $2/n$. La integral del Ejercicio 8 pasa a ser entonces

$$w = A' \int_0^z \frac{dS}{(S^n - 1)^{2/n}} + B.$$

Probar que para $A' = 1$ y $B = 0$, esta transformación aplica el interior del círculo unidad $|Z| = 1$ sobre el interior de un polígono regular de n lados cuyo centro es el punto $w = 0$.

Sugerencia: La imagen de cada Z_j $(j = 1, 2, ..., n)$ es un vértice de cierto polígono con ángulo exterior $2\pi/n$ en él. Escribamos

$$w_1 = \int_0^1 \frac{dS}{(S^n - 1)^{2/n}},$$

siendo el camino de integración el eje real positivo desde $Z = 0$ hasta $Z = 1$, y tomandoel valor positivo de la raíz n-ésima de $(S^n - 1)^2$. Demostrar entonces que las imágenes de los puntos $Z_2 = \omega, ..., Z_n = \omega^{n-1}$ son los puntos $\omega w_1, ..., \omega^{n-1}w_1$, respectivamente. Verificar de ese modo que el polígono es regular y con centro en $w = 0$.

10. Obtener la desigualdad [5] de la Sección 88.

Sugerencia: Sea R mayor que los números $|x_j|$ $(j = 1, 2, ..., n - 1)$. Nótese que si R es suficientemente grande, las desigualdades $|z|/2 < |z - x_j| < 2|z|$ son válidas para todo x_j cuando $|z| > R$. Usar ahora la Ecuación [1], Sección 88, junto con las condiciones [5] de la Sección 87.

11. Usar la condición [5] de la Sección 88, y condiciones suficientes para la existencia de integrales impropias de funciones reales, con el propósito de demostrar que $F(x)$ tiene algún límite W_n cuando x tiende a infinito, donde F viene definida por la Ecuación [3] de esta sección. Asimismo, probar que la integral de $f'(z)$ sobre todo arco de un

semicírculo $|z| = R$, Im $z \geqq 0$, tiende a 0 al tender R hacia infinito. Deducir entonces que

$$\lim_{z \to \infty} F(z) = W_n \qquad (\text{Im } z \geqq 0),$$

tal como se afirmaba en [6] de la Sección 88.

12. De acuerdo con la Sección 63, la expresión

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g'(z)}{g(z)} dz$$

se puede utilizar para determinar el número de ceros de una función g interiores a un contorno cerrado simple C, positivamente orientado, si $g(z) \neq 0$ sobre C y C está en algún dominio D simplemente conexo en el que g es analítica y $g'(z)$ no se anula nunca. Pongamos en esa expresión $g(z) = f(z) - w_0$, donde $f(z)$ es la función de la transformación de Schwarz-Christoffel [7], Sección 88, y el punto w_0 es interior o exterior al polígono P, imagen del eje x; así que $f(z) \neq w_0$. Sea C el contorno formado por la mitad superior de un cículo $|z| = R$ y un segmento $-R < x < R$ del eje x que contiene a los $n - 1$ puntos x_j, excepto que un pequeño segmento en torno a cada punto x_j se sustituye por la mitad superior de un círculo $|z - x_j| = \rho_j$ con ese segmento por diámetro. Entonces, el número de puntos z interiores a C tales que

$$N_C = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} dz.$$

Nótese que $f(z) - w_0$ tiende hacia el punto no nulo $W_n - w_0$ cuando $|z| = R$ y R tiende a infinito, y recuérdese la propiedad [5], Sección 88, para $|f'(z)|$. Hagamos tender ρ_j a cero, y probemos que el número de puntos en el semiplano superior en los que $f(z) = w_0$ es

$$N = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{f'(x)}{f(x) - w_0} dx.$$

Deducir que al ser

$$\int_P \frac{dw}{w - w_0} = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{f'(x)}{f(x) - w_0} dx,$$

$N = 1$ si w_0 es interior a P y que $N = 0$ si w_0 es exterior a P. Probar así que la aplicación del semiplano Im $z > 0$ sobre el interior de P es uno a uno.

91. FLUJO DE FLUIDO EN UN CANAL A TRAVES DE UNA RENDIJA

Presentaremos ahora otro ejemplo del flujo ideal estacionario tratado en el Capítulo 9, un ejemplo que nos enseñará cómo tener en cuenta fuentes y sumideros en problemas de fluidos. En esta sección y en las dos siguientes, planteamos

los problemas en el plano uv, en lugar de hacerlo en el plano xy. Ello nos permite referirnos directamente a resultados previos de este capítulo, sin necesidad de intercambiar los planos.

Consideremos el flujo estacionario de fluido entre dos planos paralelos $v = 0$ y $v = \pi$ cuando el fluido entra por una estrecha rendija a lo largo de la recta del primer plano que es perpendicular al plano uv en el origen (Fig. 120). Sea el flujo de fluido en el canal a través de la rendija de Q unidades de volumen por unidad de tiempo por cada unidad de profundidad del canal, medida ésta perpendicularmente al plano uv. El ritmo de flujo en cada extremo es, por tanto, $Q/2$.

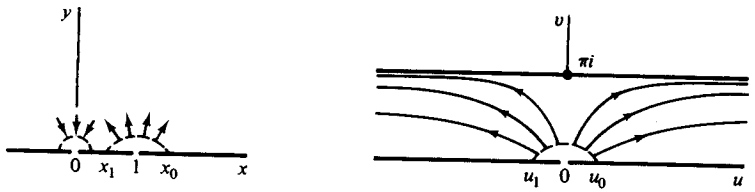


Figura 120

La transformación $w = \text{Log } z$, deducida en el Ejemplo 2 de la Sección 90, es una aplicación uno a uno del semiplano z superior sobre la franja del plano w. La transformación inversa

$$z = e^w = e^u e^{iv} \qquad [1]$$

aplica la franja sobre el semiplano (Ej. 2, Sec. 68). Bajo la transformación [1], la imagen del eje u es la mitad positiva del eje x, y la imagen de la recta $v = \pi$ es el semieje x negativo. Así que la frontera de la franja se transforma en la del semiplano.

La imagen del punto w_0 es el punto $z = 1$. La magen de un punto $w = u_0$, con $u_0 > 0$, es un punto $z = x_0$ con $x_0 > 1$. El ritmo de flujo a través de una curva que une el punto $w = u_0$ con un punto (u, v), interior a la franja, es una función de corriente $\psi(u, v)$ para el flujo (Sec. 85). Si u_1 es un número real negativo, el ritmo de flujo en el canal a través de la rendija se puede escribir

$$\psi(u_1, 0) = Q.$$

Ahora bien, bajo una transformación conforme, la función ψ se transforma en una función de x e y que representa la función de corriente para el fluido en la correspondiente región del plano z; es decir, el ritmo de flujo es el mismo a través de curvas correspondientes en los dos planos. Como en el Capítulo 9, usamos el mismo símbolo ψ para denotar las diferentes funciones de corriente en ambos planos. Ya que la imagen del punto $w = u_1$ es un punto $z = x_1$, donde $0 < x_1 < 1$, el ritmo de flujo a través de cualquier curva que conecte los puntos $z = x_0$ y $z = x_1$ que esté contenida en el semiplano z superior, es igual a Q. Por tanto, existe una fuente en el punto $z = 1$ igual a la fuente en $w = 0$.

El argumento anterior se aplica en general para demostrar que *bajo una transformación conforme, una fuente o un sumidero en un punto dado corresponde a una fuente o sumidero idéntico en la imagen de ese punto.* Al tender $\text{Re } w$ hacia $-\infty$, la imagen de w se aproxima al punto $z = 0$. Un sumidero de intensidad $Q/2$ en este último punto corresponde al sumidero infinitamente alejado a la izquierda de la franja. Para aplicar el anterior razonamiento a esta situación, consideremos el ritmo de flujo a través de una curva que conecta las rectas frontera $v = 0$ y $v = \pi$ de la parte izquierda de la franja y el ritmo de flujo a través de la imagen de esa curva en el plano z.

El sumidero del extremo derecho de la franja se transforma en un sumidero en el infinito del plano z.

La función de corriente ψ para el flujo en el semiplano z superior en este caso debe ser una función con valores constantes a lo largo de cada una de las tres partes del eje x. Además, su valor ha de incrementarse en Q al moverse el punto z en torno al punto $z = 1$ desde la posición $z = x_0$ hasta la posición $z = x_1$, y debe decrecer en $Q/2$ al moverse z en torno al origen del modo correspondiente. Vemos que la función

$$\psi = \frac{Q}{\pi}\left[\text{Arg}\,(z - 1) - \frac{1}{2}\,\text{Arg}\,z\right]$$

satisface todos esos requisitos. Más aún, esa función es armónica en el semiplano $\text{Im}\, z > 0$, ya que es la componente imaginaria de la función

$$F = \frac{Q}{\pi}\left[\text{Log}\,(z - 1) - \frac{1}{2}\,\text{Log}\,z\right] = \frac{Q}{\pi}\,\text{Log}\,(z^{1/2} - z^{-1/2}).$$

La función F es un potencial complejo para el flujo en el semiplano superior z. Como $z = e^w$, un potencial complejo $F(w)$ para el flujo en el canal es

$$F(w) = \frac{Q}{\pi}\,\text{Log}\,(e^{w/2} - e^{-w/2}).$$

Módulo una constante aditiva, podemos escribir

$$F(w) = \frac{Q}{\pi}\,\text{Log}\left(\text{senh}\,\frac{w}{2}\right). \qquad [2]$$

Hemos usado el mismo símbolo F para denotar tres funciones distintas, una de ellas en el plano z y dos en el plano w.

El vector velocidad $\overline{F'(w)}$ viene dado por

$$V = \frac{Q}{2\pi}\,\text{cotgh}\,\frac{\bar{w}}{2}. \qquad [3]$$

De donde se ve que

$$\lim_{|u| \to \infty} V = \frac{Q}{2\pi}.$$

Además, el punto $w = \pi i$ es un *punto de remanso*, es decir, un punto en el que la velocidad es cero. Por tanto, la presión del fluido a lo largo de la pared $v = \pi$ es máxima en los puntos situados frente a la rendija.

La función de corriente $\psi(u, v)$ para el canal es la componente imaginaria de la función $F(w)$ dada por la Ecuación [2]. Las líneas de corriente $\psi(u, c) = c_2$ son, en consecuencia, las curvas

$$\frac{Q}{\pi} \operatorname{Arg}\left(\operatorname{senh} \frac{w}{2}\right) = c_2.$$

Esta ecuación se reduce a

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = c \operatorname{tgh} \frac{u}{2}, \qquad [4]$$

donde c es cualquier constante real. Algunas líneas de corriente se recogen en la Figura 120.

92. FLUJO EN UN CANAL CON RECODO

Como ilustración adicional de la transformación de Schwarz-Christoffel, vamos a hallar el potencial complejo para el flujo de un fluido en un canal con un cambio abrupto en su anchura (Fig. 121). Tomamos nuestra unidad de longitud de modo que la mayor anchura del canal sea de π unidades; entonces $h\pi$, con $0 < h < 1$, representará su anchura menor. Denotemos por la constante real V_0 la velocidad del fluido en la parte infinitamente alejada de máxima anchura, o sea,

$$\lim_{u \to -\infty} V = V_0,$$

donde la variable compleja V representa el vector velocidad. El ritmo de flujo por unidad de profundidad a través del canal, o sea, la intensidad de la fuente de la izquierda y del sumidero de la derecha, es por consiguiente

$$Q = \pi V_0. \qquad [1]$$

Cabe considerar la sección del canal como caso límite del cuadrilátero de vértices w_1, w_2, w_3 y w_4 que muestra la Figura 121, cuando el primero y el último

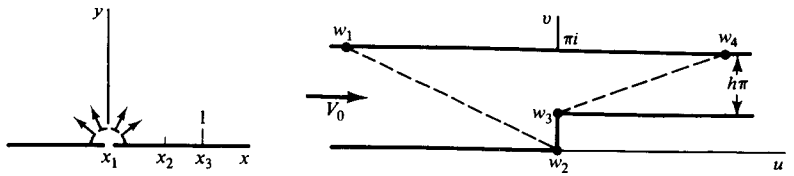


Figura 121

de esos vértices se desplaza infinitamente lejos a izquierda y a derecha, respectivamente. En el límite, los ángulos exteriores pasan a ser

$$k_1\pi = \pi, \quad k_2\pi = \frac{\pi}{2}, \quad k_3\pi = -\frac{\pi}{2}, \quad k_4\pi = \pi.$$

Como antes, procederemos formalmente, usando valores límite siempre que convenga. Si hacemos $x_1 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = \infty$ y dejamos x_2 a determinar, con $0 < x_2 < 1$, la derivada de la función que define la aplicación se convierte en

$$\frac{dw}{dz} = Az^{-1}(z - x_2)^{-1/2}(z - 1)^{1/2}. \qquad [2]$$

Para simplificar la determinación de las constantes A y x_2, buscamos directamente el potencial complejo del flujo. La fuente en el canal infinitamente alejada a la izquierda corresponde a una fuente idéntica en $z = 0$ (Sec. 91). La frontera total del canal es la imagen del eje x. En vista de [1], la función

$$F = V_0 \operatorname{Log} z = V_0 \ln r + iV_0\theta \qquad [3]$$

es el potencial complejo del flujo en el semiplano z superior, con la fuente requerida en el origen. Aquí la función de corriente es $\psi = V_0\theta$. Crece en valor desde 0 hasta $V_0\pi$ sobre cada semicírculo $z = \mathrm{Re}^{i\theta}$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$, donde $R > 0$, al variar θ de 0 a π. [Comparar con la Ecuación [5], Sec. 85, y el Ejerc. 8, Sec. 86.]

El complejo conjugado de la velocidad V en el plano w se puede escribir

$$\overline{V(w)} = \frac{dF}{dw} = \frac{dF}{dz}\frac{dz}{dw}.$$

Así pues, refiriéndonos a las ecuaciones [2] y [3], podemos ver que

$$\overline{V(w)} = \frac{V_0}{A}\left(\frac{z - x_2}{z - 1}\right)^{1/2}. \qquad [4]$$

En la posición límite del punto w_1, que corresponde a $z = 0$, la velocidad es la constante real V_0, luego de [4] se desprende que

$$V_0 = \frac{V_0}{A}\sqrt{x_2}.$$

En la posición límite de w_4, que corresponde a $z = \infty$, denotemos la velocidad por el número real V_4. Parece plausible que al mover infinitamente lejos hacia la derecha un segmento recto vertical que tapone la parte estrecha el canal, V tiende a V_4 en todo punto de ese segmento. Podríamos probar esta conjetura hallando primero w como función de z a partir de [2], pero para abreviar la discusión lo daremos por cierto. En tal circunstancia, como el flujo es estacionario,

$$\pi h V_4 = \pi V_0 = Q,$$

o sea, $V_4 = V_0/h$. Haciendo tender z hacia infinito en [4], vemos que

$$\frac{V_0}{h} = \frac{V_0}{A}.$$

Así pues,

$$A = h, \quad x_2 = h^2, \tag{5}$$

y

$$\overline{V(w)} = \frac{V_0}{h}\left(\frac{z - h^2}{z - 1}\right)^{1/2}. \tag{6}$$

De [6] vemos que la magnitud $|V|$ de la velocidad se hace infinita en la esquina w_3, ya que es la imagen del punto $z = 1$. Asimismo, la esquina w_2 es un punto de remanso, un punto en el que $V = 0$. A lo largo de la frontera del canal la presión del fluido es, por tanto, máxima en w_2 y mínima en w_3.

Para escribir la relación entre el potencial y la variable w, hemos de integrar la Ecuación [2], que ahora se escribe

$$\frac{dw}{dz} = \frac{h}{z}\left(\frac{z - 1}{z - h^2}\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Sustituyendo una nueva variable s, donde

$$\frac{z - h^2}{z - 1} = s^2,$$

se puede probar que [7] se reduce a

$$\frac{dw}{ds} = 2h\left(\frac{1}{1 - s^2} - \frac{1}{h^2 - s^2}\right).$$

En consecuencia,

$$w = h \operatorname{Log} \frac{1 + s}{1 - s} - \operatorname{Log} \frac{h + s}{h - s}. \tag{8}$$

La constante de integración aquí es cero porque cuando $z = h^2$, s es cero y, por tanto, w es cero.

En términos de s, el potencial F de la Ecuación [3] se convierte en

$$F = V_0 \operatorname{Log} \frac{h^2 - s^2}{1 - s^2};$$

y, por tanto,

$$s^2 = \frac{\exp(F/V_0) - h^2}{\exp(F/V_0) - 1}. \tag{9}$$

Sustituyendo s de esta ecuación en [8] obtenemos una relación implícita que define el potencial F como función de w.

93. POTENCIAL ELECTROSTATICO EN EL BORDE DE UNA PLACA CONDUCTORA

Dos placas conductoras paralelas de extensión infinita se mantienen a potencial electrostático $V = 0$. Se escogen el sistema coordenado y la unidad de longitud de manera que las placas estén en los planos $v = 0$, $v = \pi$ y $v = \pi/2$ (Fig. 122). Hallemos el potencial $V(u, v)$ en la región comprendida entre las placas.

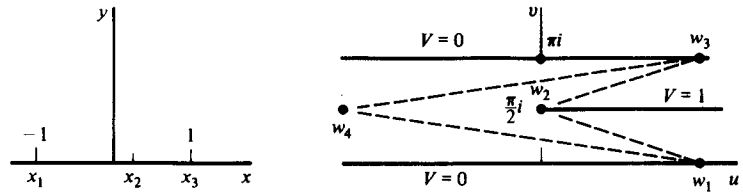


Figura 122

La sección de esa región en el plano uv tiene la forma límite del cuadrilátero acotado por las líneas de trazos en la figura cuando w_1 y w_3 se desplazan a la derecha y w_4 a la izquierda. Al aplicar aquí la transformación de Schwarz-Christoffel, tomamos como punto x_4, correspondiente al vértice w_4, el del infinito. Elegimos $x_1 = -1$, $x_3 = 1$ y dejamos x_2 a determinar. Los valores límites de los ángulos exteriores del cuadrilátero son

$$k_1\pi = \pi, \quad k_2\pi = -\pi, \quad k_3\pi = k_4\pi = \pi.$$

Luego

$$\frac{dw}{dz} = A(z + 1)^{-1}(z - x_2)(z - 1)^{-1} = A\left(\frac{z - x_2}{z^2 - 1}\right) = \frac{A}{2}\left(\frac{1 + x_2}{z + 1} + \frac{1 - x_2}{z - 1}\right),$$

de modo que la transformación del semiplano z superior en la franja dividida del plano w adopta la forma

$$w = \frac{A}{2}[(1 + x_2)\,\text{Log}\,(z + 1) + (1 - x_2)\,\text{Log}\,(z - 1)] + B. \qquad [1]$$

Sean A_1, A_2 y B_1, B_2 las partes reales e imaginarias de las constantes A y B. Cuando $z = x$, el punto w está en la frontera de la franja dividida y, de acuerdo con [1],

$$u + iv = \frac{A_1 + iA_2}{2}\{(1 + x_2)[\ln|x + 1| + i\arg(x + 1)] + (1 - x_2)[\ln|x - 1| + i\arg(x - 1)]\} + B_1 + iB_2. \qquad [2]$$

Para hallar las constantes, hagamos notar en primer lugar que la posición límite del segmento recto que une w_1 con w_4 es el eje u. Ese segmento es la imagen de la porción del eje x a la izquierda del punto $x_1 = -1$; ello se debe a que el segmento recto que une w_3 con w_4 es la imagen de la parte del eje x a la derecha de $x_3 = 1$, y los otros dos lados del cuadrilátero son las imágenes de los dos segmentos restantes del eje x. Por tanto, cuando $v = 0$ y u tiende a infinito por valores positivos, el correspondiente punto tiende hacia el punto $z = -1$ por la izquierda. Luego

$$\arg(x + 1) = \pi, \quad \arg(x - 1) = \pi,$$

y $\ln|x + 1|$ tiende a $-\infty$. Además, por ser $-1 < x_2 < 1$, la parte real de la cantidad que está entre paréntesis en la Ecuación [2] tiende a $-\infty$. Puesto que $v = 0$, se sigue que $A_2 = 0$; de lo contrario, la parte imaginaria de la derecha se haría infinita. Igualando las partes imaginarias de ambos lados se ve que

$$0 = \frac{A_1}{2}[(1 + x_2)\pi + (1 - x_2)\pi] + B_2.$$

Por consiguiente

$$-\pi A_1 = B_2, \quad A_2 = 0. \qquad [3]$$

La posición límite del segmento recto que une w_1 y w_2 es la semirrecta $v = \pi/2$, $u \geqq 0$. Los puntos de esa semirrecta son imágenes de los puntos $z = x$, donde $-1 < x \leqq x_2$; así pues,

$$\arg(x + 1) = 0, \quad \arg(x - 1) = \pi.$$

Identificando las partes imaginarias de ambos miembros de la Ecuación [2] para esos puntos, tenemos

$$\frac{\pi}{2} = \frac{A_1}{2}(1 - x_2)\pi + B_2. \qquad [4]$$

Finalmente, las posiciones límites de los puntos del segmento recto que une w_3 y w_4 son los puntos $u + \pi i$, que son imágenes de los puntos x con $x > 1$. Identificando para ellos las partes imaginarias en [2] se obtiene

$$\pi = B_2.$$

Entonces, a la vista de [3] y [4],

$$A_1 = -1, \quad x_2 = 0.$$

Así que $x = 0$ es el punto cuya imagen es el vértice $w = \pi i/2$, y tras sustituir estos valores en [2] e identificar las partes reales, vemos que $B_1 = 0$.

La transformación [1] se convierte así en

$$w = -\frac{1}{2}[\text{Log}\,(z + 1) + \text{Log}\,(z - 1)] + \pi i, \qquad [5]$$

o sea

$$z^2 = 1 + e^{-2w}. \qquad [6]$$

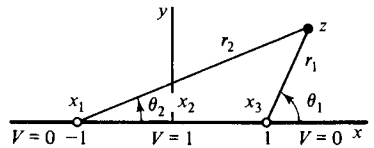


Figura 123

Bajo esta transformación, la requerida función armónica $V(u, v)$ pasa a ser una función armónica de x e y en el semiplano $y > 0$, y las condiciones de contorno indicadas en la Figura 123 se satisfacen. Nótese que $x_2 = 0$ ahora. La función armónica en ese semiplano que toma aquellos valores sobre el contorno es la componente imaginaria de la función analítica

$$\frac{1}{\pi}\,\text{Log}\,\frac{z - 1}{z + 1} = \frac{1}{\pi}\ln\frac{r_1}{r_2} + \frac{i}{\pi}(\theta_1 - \theta_2),$$

donde θ_1 y θ_2 recorren de 0 a π. Escribiendo las tangentes de estos ángulos como funciones de x e y, obtenemos después de simplificar que

$$\text{tg}\,\pi V = \text{tg}\,(\theta_1 - \theta_2) = \frac{2y}{z^2 + y^2 - 1}. \qquad [7]$$

La Ecuación [6] proporciona expresiones para $x^2 + y^2$ y $x^2 - y^2$ en

términos de u, v. Así pues, de [7] podemos concluir que la relación entre el potencial V y las coordenadas u, v es

$$\text{tg } \pi V = \frac{1}{s}\sqrt{e^{-4u} - s^2}, \qquad [8]$$

donde

$$s = -1 + \sqrt{1 + 2e^{-2u}\cos 2v + e^{-4u}}.$$

EJERCICIOS

1. Usar la transformación de Schwarz-Christoffel para obtener formalmente la aplicación dada en la Figura 22 del Apéndice 2.

2. Explicar por qué la solución al problema del flujo en un canal con una obstrucción rectangular semiinfinita (Fig. 124) queda incluida en la solución del problema tratado en la Sección 92.

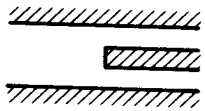


Figura 124

3. Nos referimos a la Figura 29 del Apéndice 2. Cuando z se mueve hacia la derecha a lo largo de la parte negativa del eje real donde $x \leqq -1$, su imagen w se muve hacia la derecha a lo largo de la semirrecta $u \leqq 0$, $v = h$. Al moverse z hacia la derecha por el segmento $-1 \leqq x \leqq 1$ del eje x, su imagen w se desplaza en la dirección de v decreciente por el segmento $0 \leqq v \leqq h$ del eje v. Por fin, cuando z se mueve hacia la derecha por la parte $x \geqq 1$ del eje real positivo, su punto imagen w se desplaza hacia la derecha por el eje real positivo. Nótense los cambios de dirección de w en las imágenes de los puntos $z = -1$ y $z = 1$. Estos cambios indican que la derivada de una función aplicación podría ser

$$\frac{dw}{dz} = A\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{1/2},$$

siendo A una constante. Obtener así formalmente la transformación adjunta a esa figura. Verificar que la transformación, escrita en la forma

$$w = \frac{h}{\pi}\{(z+1)^{1/2}(z-1)^{1/2} + \text{Log}\,[z + (z+1)^{1/2}(z-1)^{1/2}]\},$$

con $0 \leqq arg\,(z \pm 1) \leqq \pi$, aplica la frontera del modo que se indica en la citada figura.

4. Sea $T(u, v)$ la temperatura acotada en estado estacionario de la región sombreada del plano w en la Figura 29 del Apéndice 2, con condiciones de contorno $T(u, h) = 1$ si

$u < 0$ y $T = 0$ sobre el resto $B'C'D'$) del contorno. En términos del parámetro real α $(0 < \alpha < \pi/2)$, probar que la imagen de cada punto $z = i\,\text{tg}\,\alpha$ sobre el eje y positivo es el punto

$$w = \frac{h}{\pi}\left[\ln(\text{tg}\,\alpha + \sec\alpha) + i\left(\frac{\pi}{2} + \sec\alpha\right)\right]$$

(véase Ejerc. 3) y que la temperatura en el punto w es

$$T(u, v) = \frac{\alpha}{\pi} \qquad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

5. Sea $F(w)$ el potencial complejo para el flujo de un fluido sobre un escalón en el lecho de una corriente profunda representado por la región sombreada en el plano w de la Figura 29 del Apéndice 2, donde la velocidad V del fluido se aproxima a una constante real V_0 cuando $|w|$ tiende a infinito en esa región. La transformación que aplica el semiplano superior z sobre esa región se puede ver en el Ejercicio 3. Usando la identidad $dF/dw = (dF/dz)(dz/dw)$, probar que

$$\overline{V(w)} = V_0(z-1)^{1/2}(z+1)^{-1/2};$$

y en términos de los puntos $z = x$ que tienen por imágenes los puntos del lecho, probar que

$$|V| = |V_0|\sqrt{\left|\frac{x-1}{x+1}\right|}.$$

Nótese que la magnitud de la velocidad crece desde $|V_0|$ a lo largo de $A'B'$ hasta $|V| = \infty$ en B', disminuye entonces hasta cero en C', y crece hacia $|V_0|$ desde C' hasta D'. Téngase en cuenta, también, que la magnitud de la velocidad es $|V_0|$ en el punto

$$w = i\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\right)h,$$

entre B' y C'.

CAPITULO

ONCE

FORMULAS INTEGRALES DE TIPO POISSON

En este capítulo desarrollamos una teoría que nos permitirá obtener soluciones de diversos problemas de valores de contorno expresados en términos de integrales definidas o impropias. Muchas de las integrales que aparecen pueden, de hecho, ser calculadas sin dificultad.

94. FORMULA INTEGRAL DE POISSON

Sea C_0 un círculo orientado positivamente y centrado en el origen. Sea f una función analítica dentro de y sobre C_0. La fórmula integral de Cauchy (Sec. 39)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(s)\, ds}{s - z} \qquad [1]$$

expresa el valor de f en cualquier punto interior a C_0 en términos de los valores de f en los puntos s de C_0. En esta sección vamos a obtener de [1] una fórmula correspondiente para la parte real de f, y en la Sección 95 la usaremos para resolver el problema de Dirichlet para el disco limitado por C_0.

Denotemos por r_0 el radio de C_0 y escribamos $z = r \exp(i\theta)$, con $0 < r < r_0$ (Fig. 125). El inverso del punto no nulo z con respecto al círculo es el punto z_1 que está en el mismo rayo que z y satisface la condición $|z_1||z_2| = r_0^2$; así pues, si s es un punto de C_0,

$$z_1 = \frac{r_0^2}{r} \exp(i\theta) = \frac{r_0^2}{\bar{z}} = \frac{s\bar{s}}{\bar{z}}. \qquad [2]$$

Como z_1 es exterior al círculo C_0, se sigue del teorema de Cauchy-Goursat que el valor de la integral en [1] es cero cuando z se sustituye por z_1 en el integrando. Por tanto,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \left(\frac{1}{s - z} - \frac{1}{s - z_1} \right) f(s)\, ds;$$

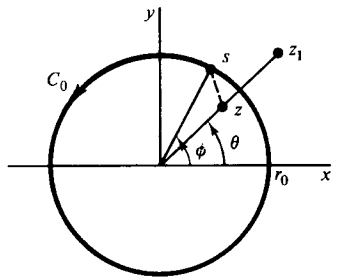


Figura 125

y usando la representación paramétrica $s = r_0 \exp(i\phi)$ $(0 \leqq \phi \leqq 2\pi)$ para C_0, podemos escribir

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{s}{s - z} - \frac{s}{s - z_1} \right) f(s)\, d\phi,$$

donde, por conveniencia, retenemos s en vez de escribir $r_0 \exp(i\phi)$.

Nótese que, a la vista de la última de las expresiones [2] para z_1, el factor que va entre paréntesis aquí se puede poner como

$$\frac{s}{s - z} - \frac{1}{1 - (\bar{s}/\bar{z})} = \frac{s}{s - z} + \frac{\bar{z}}{\bar{s} - \bar{z}} = \frac{r_0^2 - r^2}{|s - z|^2}. \qquad [3]$$

En consecuencia, una forma alternativa para la fórmula integral de Cauchy es

$$f(re^{i\theta}) = \frac{r_0^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(r_0 e^{i\phi})}{|s - z|^2}\, d\phi \qquad [4]$$

cuando $0 < r < r_0$. Esta forma sigue siendo válida para $r = 0$; en este caso se reduce directamente a

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r_0 e^{i\phi})\, d\phi,$$

que no es sino la forma paramétrica de la Ecuación [1] con $z = 0$.

La cantidad $|s - z|$ es la distancia entre los puntos s y z, y la ley del coseno permite escribir (véase Fig. 125)

$$|s - z|^2 = r_0^2 - 2r_0 r \cos(\phi - \theta) + r^2. \qquad [5]$$

Luego, si u es la parte real de la función analítica f, deducimos de [4] que

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(r_0^2 - r^2) u(r_0, \phi)}{r_0^2 - 2r_0 r \cos(\phi - \theta) + r^2}\, d\phi \qquad (r < r_0). \qquad [6]$$

Esta es la fórmula integral de Poisson para la función armónica u en el disco abierto acotado por el círculo $r = r_0$.

La Fórmula [6] define una transformación integral lineal de $u(r_0, \phi)$ en $u(r, \theta)$. El núcleo de la transformación es, salvo un factor $1/(2\pi)$, la función real

$$P(r_0, r, \phi - \theta) = \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2r_0 r \cos(\phi - \theta) + r^2}, \qquad [7]$$

que se conoce como *núcleo de Poisson*. Debido a la Ecuación [5] podemos escribir también

$$P(r_0, r, \phi - \theta) = \frac{r_0^2 - r^2}{|s - z|^2}; \qquad [8]$$

y, como $r < r_0$, P es claramente una función positiva. Además, puesto que $\bar{z}/(\bar{s} - \bar{z})$ y su complejo conjugado $z/(s - z)$ tienen la misma parte real, vemos en la segunda Ecuación [3] que

$$P(r_0, r, \phi - \theta) = \operatorname{Re}\left(\frac{s}{s - z} + \frac{z}{s - z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{s + z}{s - z}\right). \qquad [9]$$

Así que $P(r_0, r, \phi - \theta)$ es una función armónica de r y θ interior a C_0 para cada s fijado en C_0. De [7] se deduce que $P(r_0, r, \phi - \theta)$ es una función periódica par de $\phi - \theta$, con período 2π; y su valor es 1 cuando $r = 0$.

La fórmula integral de Poisson [6] se puede escribir ahora

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta)u(r_0, \phi)\,d\phi \qquad (r < r_0). \qquad [10]$$

Cuando $f(z) = u(r, \theta) = 1$, la Ecuación [10] demuestra que P tiene la propiedad

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta)\,d\phi = 1 \qquad (r < r_0) \qquad [11]$$

Hemos supuesto que f es analítica no sólo en el interior de C_0 sino también sobre C_0 y que, por tanto, u es armónica en un dominio que incluye todos los puntos de ese círculo. En particular, u es continua sobre C_0. Ahora relajaremos estas condiciones.

95. PROBLEMA DE DIRICHLET PARA UN DISCO

Sea F una función continua a trozos de θ en el intervalo $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$. La transformada integral de Poisson de F se define en términos del núcleo de

Poisson $P(r_0, r, \phi - \theta)$ introducido en la Sección 94, por medio de la ecuación

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta)F(\phi)\,d\phi \qquad (r < r_0). \qquad [1]$$

En esta sección probaremos que la función $U(r, \theta)$ es armónica en el interior del círculo $r = r_0$ y que

$$\lim_{\substack{r \to r_0 \\ r < r_0}} U(r, \theta) = F(\theta) \qquad [2]$$

para todo θ fijo en el que F sea continua. En consecuencia, U es una solución del problema de Dirichlet para el disco $r < r_0$ en el sentido de que $U(r, \theta)$ tiende al valor frontera $F(\theta)$ cuando el punto (r, θ) tiende hacia (r_0, θ) a lo largo de un radio, excepto en el número finito de puntos (r_0, θ) en los que se pueden producir discontinuidades de F.

Ejemplo. Antes de demostrar la afirmación anterior, vamos a aplicarla al cálculo del potencial $V(r, \theta)$ en el interior de un largo cilindro hueco, partido longitudinalmente en dos mitades iguales, cuando $V = 1$ en una de ellas y $V = 0$ en la otra. Este problema fue resuelto mediante transformaciones conformes en la Sección 83, donde se interpretó como un problema de Dirichlet para el disco $r < 1$, siendo $V = 0$ en la mitad superior del contorno $r = 1$ y $V = 1$ en la inferior.

En la Ecuación [1], escribamos V en lugar de U, y hagamos $r_0 = 1$, y $F(\phi) = 0$ cuando $0 < \phi < \pi$ y $F(\phi) = 1$ cuando $\pi < \phi < 2\pi$, con lo que se obtiene

$$V(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} P(1, r, \phi - \theta)\,d\phi, \qquad [3]$$

donde

$$P(1, r, \phi - \theta) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\phi - \theta)}.$$

Una primitiva de $P(1, r, \psi)$ es

$$\int P(1, r, \psi)\,d\psi = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1 + r}{1 - r}\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}\right), \qquad [4]$$

siendo el integrando la derivada con respecto a ψ de la función de la derecha. Por tanto, de [3] se desprende que

$$\pi V(r, \theta) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1 + r}{1 - r}\operatorname{tg}\frac{2\pi - \theta}{2}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{1 + r}{1 - r}\operatorname{tg}\frac{\pi - \theta}{2}\right).$$

Tras simplificar la expresión de tg $[\pi V(r, \theta)]$ obtenida de esta última ecuación (véase Ejer. 3, Sec. 96), encontramos que

$$V(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{1 - r^2}{2r \operatorname{sen} \theta}\right) \qquad (0 \leqq \operatorname{arctg} t \leqq \pi), \qquad [5]$$

donde la restricción impuesta sobre los valores de la función arcotangente es físicamente evidente. Al expresarla en coordenadas rectangulares, esta solución coincide con la [5] de la Sección 83.

Volvamos a la demostración de que la función U definida en [1] satisface el problema de Dirichlet para el disco $r < r_0$, como se afirmó antes del ejemplo. En primer lugar, U es armónica dentro del círculo $r = r_0$, porque P es una función armónica de r y θ allí. Más exactamente, como F es continua a trozos, la integral [1] se puede escribir como suma de un número finito de integrales definidas, cada una de las cuales tiene un integrando continuo en r, θ y ϕ. Las derivadas parciales de esos integrandos con respecto a r y θ son también continuas. Ya que, por tanto, podemos intercambiar el orden de integración y derivación, y puesto que P satisface la ecuación de Laplace

$$r^2 P_{rr} + r P_r + P_{\theta\theta} = 0$$

en las coordenadas polares r y θ (Ejerc. 10, Sec. 21), se sigue que U cumple también esa ecuación.

Con el fin de verificar el límite [2[, necesitamos probar que si F es continua en θ, a cada ε positivo le corresponde un δ positivo tal que

$$|U(r, \theta) - F(\theta)| < \varepsilon \quad \text{si} \quad 0 < r_0 - r < \delta. \qquad [6]$$

Comenzamos recordando la propiedad [11], Sección 94, del núcleo dePoisson, y escribiendo

$$U(r, \theta) - F(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta)[F(\phi) - F(\theta)]d\theta.$$

Por conveniencia, extendemos F periódicamente con período 2π, de modo que el integrando sea periódico en ϕ con ese mismo período. Además, podemos suponer que $0 < r < r_0$ por la naturaleza del límite en cuestión.

Ahora observamos que, al ser F continua, existe un número positivo pequeño α tal que

$$|F(\phi) - F(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{si} \quad |\phi - \theta| \leqq \alpha. \qquad [7]$$

Evidentemente,

$$U(r, \theta) - F(\theta) = I_1(r) + I_2(r). \qquad [8]$$

donde

$$I_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-\alpha}^{\theta+\alpha} + P(r_0, r, \phi - \theta)[F(\phi) - F(\theta)]\, d\phi,$$

$$I_2(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta+\alpha}^{\theta-\alpha+2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta)[F(\phi) - F(\theta)]\, d\phi.$$

El hecho de que P sea positiva (Sec. 94) junto con la primera de las desigualdades [7] y la propiedad [11], Sección 94, de esa función, nos permite ver que

$$|I_1(r)| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{\theta-\alpha}^{\theta+\alpha} P(r_0, r, \phi - \theta)|F(\phi) - F(\theta)|\, d\phi$$

$$< \frac{\varepsilon}{4\pi} \int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta)\, d\phi = \frac{\varepsilon}{2}.$$

En lo que afecta a la integral $I_1(r)$, vemos de la Figura 125 en la Sección 94 que el denominador $|s - z|^2$ en la expresión [8] para $P(r_0, r, \phi - \theta)$ en esa sección tiene un valor (positivo) mínimo m al variar el argumento ϕ de s sobre el intervalo cerrado $\theta + \alpha \leqq \phi \leqq \theta - \alpha + 2\pi$. Así pues, si M es una cota superior de la función continua a trozos $|F(\phi) - F(\theta)|$ en el intervalo $0 \leqq \phi \leqq 2\pi$, se deduce que

$$|I_2(r)| \leqq \frac{(r_0^2 - r^2)M}{2\pi m} 2\pi < \frac{2Mr_0}{m}(r_0 - r) < \frac{2Mr_0}{m}\delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

siempre que $r_0 - r < \delta$, con

$$\delta = \frac{m\varepsilon}{4Mr_0}. \qquad [9]$$

Finalmente, los resultados de los dos últimos párrafos nos enseñan que

$$|U(r, \theta) - F(\theta)| \leqq |I_1(r)| + |I_2(r)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

siempre que $r_0 - r < \delta$, siendo δ el número positivo definido por [9]. Es decir, la afirmación [6] es válida con esa elección de δ.

De acuerdo con [1], el valor de U en $r = 0$ es

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\phi)\, d\phi.$$

De manera que *el valor de una función armónica en el centro del círculo* $r = r_0$ *es la media de sus valores sobre el contorno de ese círculo.*

Dejamos como ejercicios el demostrar que P y U pueden representarse por series que involucran a las funciones armónicas elementales $r^n \cos n\theta$ y $r^n \operatorname{sen} n\theta$ como sigue:

$$P(r_0, r, \phi - \theta) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n \cos n(\phi - \theta) \qquad (r < r_0) \quad [10]$$

y

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n (a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta) \qquad (r < r_0), \quad [11]$$

donde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\phi)\cos n\phi\, d\phi, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(\phi) \text{ en } n\phi\, d\phi. \qquad [12]$$

96. PROBLEMAS DE CONTORNO RELACIONADOS

Los detalles de las demostraciones de los resultados que siguen se dejan como ejercicios. Suponemos que la función F que representa los valores sobre el contorno del círculo $r = r_0$ es continua a trozos.

Supongamos que $F(2\pi - \theta) = -F(\theta)$. La fórmula integral de Poisson [1] de la Sección 95 se convierte entonces en

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [P(r_0, r, \phi - \theta) - P(r_0, r, \phi + \theta)]F(\phi)\, d\phi. \qquad [1]$$

Esta función U tiene valor cero sobre los radios horizontales $\theta = 0$ y $\theta = \pi$ del círculo, como es de esperar si se interpreta U como una temperatura estacionaria. La Fórmula [1] resuelve por tanto el problema de Dirichlet para la región semicircular $r < r_0$, $0 < \theta < \pi$, donde $U = 0$ sobre el diámetro AB que se muestra en la Figura 126, y

$$\lim_{\substack{r \to r_0 \\ r < r_0}} U(r, \theta) = F(\theta) \qquad (0 < \theta < \pi) \qquad [2]$$

para cada θ fijo en el que F es continua.

Si $F(2\pi - \theta) = F(\theta)$, entonces

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [P(r_0, r, \phi - \theta) + P(r_0, r, \phi + \theta)]F(\phi)\, d\phi; \qquad [3]$$

y $U_\theta(r, \theta) = 0$ cuando $\theta = 0$ o $\theta = \pi$. Así que la Fórmula [3] proporciona una función U armónica en la región semicircular $r < r_0$, $0 < \theta < \pi$ y que satisface la condición [2], así como la condición de que su derivada normal sea cero en el diámetro AB de la Figura 126.

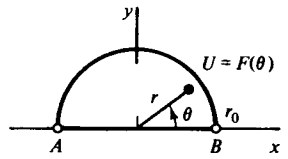


Figura 126

La función analítica $z = r_0^2/Z$ aplica el círculo $|Z| = r_0$ del plano Z sobre el círculo $|z| = r_0$ del plano z, y el exterior del primer círculo sobre el interior del del segundo. Haciendo $z = r\exp(i\theta)$ y $Z = R\exp(i\psi)$, observamos que $r = r_0^2/R$ y $\theta = 2\pi - \psi$. La función armónica $U(r, \theta)$ representada por la Fórmula [1], Sección 95, se transforma entonces en la función

$$U\left(\frac{r_0^2}{R}, 2\pi - \psi\right) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r_0^2 - R^2}{r_0^2 - 2r_0R\cos(\phi + \psi) + R^2} F(\phi)\, d\phi,$$

que es armónica en el dominio $R > r_0$. Ahora bien, en general, si $u(r, \theta)$ es armónica, también lo es $u(r, -\theta)$ (véase Ejerc. 11). Por tanto, la función $H(R, \psi) = U(r_0^2/R, \psi - 2\pi)$, o

$$H(R, \psi) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_0, R, \phi - \psi)F(\phi)\, d\phi \qquad (R > r_0), \qquad [4]$$

también es armónica. Fijado cualquier ψ en el que $F(\psi)$ es continua, vemos de [2], Sección 95, que

$$\lim_{\substack{R \to r_0 \\ R > r_0}} H(R, \psi) = F(\psi). \qquad [5]$$

Así pues, la Fórmula [4] resuelve el problema de Dirichlet para la región exterior al círculo $R = r_0$ en el plano Z (Fig. 127). Hagamos notar, de la

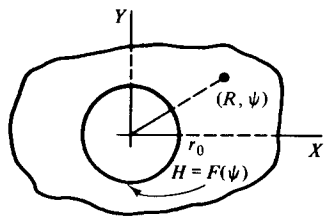


Figura 127

expresión [8], Sección 94, que el núcleo de Poisson $P(r_0, R, \phi - \psi)$ es negativo si $R > r_0$. Asimismo,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_0, R, \phi - \psi)\, d\phi = -1 \qquad (R > r_0) \qquad [6]$$

y

$$\lim_{R\to\infty} H(R, \psi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\phi)\, d\phi. \qquad [7]$$

EJERCICIOS

1. Usar la fórmula integral de Poisson [1], Sección 95, para deducir la expresión

$$V(x, y) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left[\frac{1 - x^2 - y^2}{(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1}\right] \qquad (0 \leqq \operatorname{arctg} t \leqq \pi)$$

para el potencial electrostático interior a un cilindro $x^2 + y^2 = 1$ cuando $V = 1$ sobre el primer cuadrante ($x > 0$, $y > 0$) de su superficie y $V = 0$ sobre el resto de su superficie. Explicar además por qué $1 - V$ es solución del Ejercicio 8, Sección 83.

2. Sea T la temperatura estacionaria en un disco $r \leqq 1$, con sus caras aisladas, cuando $T = 1$ en el arco $0 < \theta < 2\theta_0$ ($0 < \theta_0 < \pi/2$) del borde $r = 1$ y $T = 0$ en el resto de él. Probar mediante la fórmula integral de Poisson que

$$T(x, y) = \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\left[\frac{(1 - x^2 - y^2)y_0}{(x-1)^2 + (y - y_0)^2 - y_0^2}\right] \qquad (0 \leqq \operatorname{arctg} t \leqq \pi),$$

donde $y_0 = \operatorname{tg}\theta_0$. Comprobar que esta función T satisface las condiciones de contorno.

3. Con ayuda de las identidades trigonométricas

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}, \quad \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{cotg}\alpha = \frac{2}{\operatorname{sen} 2\alpha},$$

mostrar cómo se obtiene la solución [5] de la Sección 95 a partir de la expresión para $\pi V(r, \theta)$ que precede a esa solución.

4. Sea I la función impulso unidad (Fig. 128):

$$I(h, \theta - \theta_0) = \begin{cases} 1/h & \text{para} \quad \theta_0 \leqq \theta \leqq \theta_0 + h, \\ 0 & \text{para} \quad 0 \leqq \theta < \theta_0 \quad \text{o} \quad \theta_0 + h < \theta \leqq 2\pi, \end{cases}$$

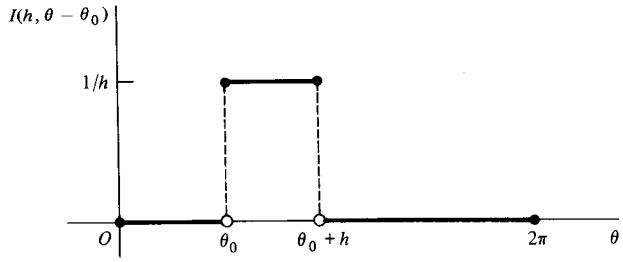


Figura 128

donde h es un número positivo y $0 \leqq \theta_0 < \theta_0 + h < 2\pi$. Nótese que

$$\int_{\theta_0}^{\theta_0 + h} I(h, \theta - \theta_0)\, d\theta = 1.$$

Usando un teorema del valor medio para integrales, demostrar que

$$\int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta) I(h, \phi - \theta_0)\, d\phi = P(r_0, r, c - \theta)\int_{\theta_0}^{\theta_0 + h} I(h, \phi - \theta_0)\, d\phi,$$

donde $\theta_0 \leqq c \leqq \theta_0 + h$, y por tanto que

$$\lim_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} \int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta) I(h, \phi - \theta_0)\, d\phi = P(r_0, r, \theta - \theta_0) \qquad (r < r_0).$$

Así pues, el núcleo de Poisson $P(r_0, r, \theta - \theta_0)$ es el límite, cuando h tiende a cero por valores positivos, de la función armónica interior al círculo $r = r_0$ cuyos valores de contorno vienen representados por la función impulso $2\pi I(h, \theta - \theta_0)$.

5. Demostrar que la expresión del Ejercicio 8, Sección 48, para la suma de una cierta serie de cosenos se puede escribir

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos n\theta = \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\theta + a^2} \qquad (-1 < a < 1).$$

Probar entonces que el núcleo de Poisson admite la representación en serie [10], Sección 95.

6. Probar que la serie en [10], Sección 95, para el núcleo de Poisson converge uniformemente respecto de ϕ. Obtener entonces de [1] en esa sección la representación en serie [11] para $U(r, \theta)$ dada allí*.

7. Hallar, mediante las expresiones [11] y [12] de la Sección 95, las temperaturas estacionarias $T(r, \theta)$ en un cilindro sólido $r \leqq r_0$ de longitud infinita si $T(r_0, \theta) = A\cos\theta$. Probar que no hay flujo de calor a través del plano $y = 0$.

Sol. $T = A(r/r_0)\cos\theta = Ax/r_0$.

---

* Este resultado se obtiene para $r_0 = 1$ por el método de separación de variables en el libro del autor *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 4.ª ed., Sección 46, 1987.

8. Obtener el caso especial

a) $H(R, \psi) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} [P(r_0, R, \phi + \psi) - P(r_0, R, \phi - \psi)]F(\phi)\, d\phi$;

b) $H(R, \psi) = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} [P(r_0, R, \phi + \psi) + P(r_0, R, \phi - \psi)]F(\phi)\, d\phi$

de la Fórmula [4] en la Sección 96, para la función armónica H en la región no acotada $R > r_0$, $0 < \psi < \pi$, que se indica en la Figura 129, si esa función satisface la condición de contorno

$$\lim_{\substack{R \to r_0 \\ R > r_0}} H(R, \psi) = F(\psi) \qquad (0 < \psi < \pi)$$

sobre el semicírculo y *a)* es cero sobre los rayos BA y DE; *b)* su derivada normal es cero sobre los rayos BA y DE.

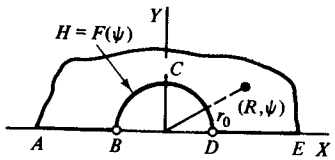


Figura 129

9. Dar los detalles de la verificación de la Fórmula [1], Sección 96, como solución del problema de Dirichlet allí enunciado para la región que muestra la Figura 126.

10. Dar los detalles de la verificación de la Fórmula [3], Sección 96, como solución del problema de contorno allí enunciado.

11. Obtener la Fórmula [4], Sección 96, como solución del problema de Dirichlet para la región exterior a un círculo (Fig. 127). Para demostrar que $u(r, -\theta)$ es armónica cuando lo es $u(r, \theta)$, utilizar la forma polar

$$r^2 u_{rr}(r, \theta) + r u_r(r, \theta) + u_{\theta\theta}(r, \theta) = 0$$

de la ecuación de Laplace.

12. Establecer la validez de la Ecuación [6], Sección 96.

13. Establecer el límite [7], Sección 96.

97. FORMULA INTEGRAL DE SCHWARZ

Sea f una función analítica de z en el semiplano Im $z \geqq 0$ tal que, para ciertas constantes positivas a y M, f satisface la propiedad de orden

$$|z^a f(z)| < M \qquad (\text{Im } z \geqq 0). \qquad [1]$$

Para un z fijo por encima del eje real, sea CR la mitad superior de un círculo orientado positivamente de radio R con centro en el origen, donde $R > |z|$ (Fig. 130). Entonces, según la fórmula integral de Cauchy,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_R} \frac{f(s)\, ds}{s - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R} \frac{f(t)\, dt}{t - z}. \qquad [2]$$

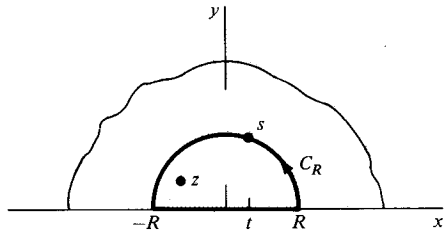


Figura 130

Vemos que la primera de estas integrales tiende a 0 cuando R tiende a infinito, ya que, a la vista de [1],

$$\left|\int_{C_R} \frac{f(s)\, ds}{s - z}\right| < \frac{M}{R^a(R - |z|)}\pi R = \frac{\pi M}{R^a(1 - |z|/R)}.$$

Así pues,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)\, dt}{t - z} \qquad (\text{Im } z > 0). \qquad [3]$$

La condición [1] asegura asimismo que la integral impropia converge*. El número al que converge es su valor principal de Cauchy (véase Sec. 58), y la representación [3] es una fórmula integral de Cauchy para el semiplano Im $z > 0$.

Si el punto z está por debajo del eje real, el miembro de la derecha en [2] es cero, luego la integral [3] es cero para tal punto. En consecuencia, cuando z está por encima del eje real, tenemos la fórmula siguiente, donde c es una constante compleja arbitraria:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{t - z} + \frac{c}{t - \bar{z}}\right) f(t)\, dt \qquad (\text{Im } z > 0). \qquad [4]$$

En los dos casos $c = -1$ y $c = 1$ eso se reduce, respectivamente, a

$$f(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(t)}{|t - z|^2}\, dt \qquad (y > 0) \qquad [5]$$

* Véase, por ejemplo, A. E. Taylor y W. R. Mann, *Advanced Calculus*, 3.ª ed., Cap. 22, 1983.

y

$$f(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t - x)f(t)}{|t - z|^2}\,dt \qquad (y > 0). \qquad [6]$$

Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, se sigue de [5] y [6] que las funciones armónicas u y v vienen representadas en el semiplano $y > 0$ en términos de los valores de contorno de u para las fórmulas

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yu(t, 0)}{|t - z|^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yu(t, 0)}{(t - x)^2 + y^2}\,dt \qquad (y > 0) \quad [7]$$

y

$$v(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - t)u(t, 0)}{(t - x)^2 + y^2}\,dt \qquad (y > 0). \qquad [8]$$

La Fórmula [7] se conoce como fórmula integral de Schwarz, o fórmula integral de Poisson para el semiplano. En la próxima sección relajaremos las condiciones de validez de [7] y [8].

98. PROBLEMA DE DIRICHLET PARA UN SEMIPLANO

Sea F una función real acotada de x que es continua, excepto a lo sumo en un número finito de saltos finitos. Cuando $y \geqq \varepsilon$ y $|x| \leqq 1/\varepsilon$, donde ε es cualquier constante positiva, la integral

$$I(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(t)\,dt}{(t - x)^2 + y^2}$$

converge uniformemente con respecto a x e y, al igual que las integrales de las derivadas parciales del integrando respecto de x e y. Cada una de estas integrales es la suma de un número finito de integrales impropias o definidas, sobre intervalos en los que F es continua; por tanto el integrando de cada integral componente es una función continua de t, x e y, cuando $y \geqq \varepsilon$. Por consiguiente, cada derivada parcial de $I(x, y)$ viene representada por la integral de la derivada correspondiente del integrando siempre que $y > 0$.

Pongamos $U(x, y) = yI(x, y)/\pi$. Es decir, U es la *transformada integral de Schwarz* de F, sugerida por la segunda de las expresiones [7], Sección 97:

$$U(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yF(t)}{(t - x)^2 + y^2}\,dt \qquad (y > 0). \qquad [1]$$

Salvo por el factor $1/\pi$, el núcleo que aquí aparece es $y/|t - z|^2$. Es la componente imaginaria de la función $1/(t - z)$, que es analítica en z para $y > 0$. Se deduce que

el núcleo es armónico, luego satisface la ecuación de Laplace en x e y. Como se puede intercambiar el orden de derivación e integración, la función [1] cumple esa ecuación. Por tanto, *U es armónica para $y > 0$.*

Para demostrar que

$$\lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} U(x, y) = F(x) \qquad [2]$$

para cada x en el que F sea continua, sustituimos $t = x + y \operatorname{tg} \tau$ en la Fórmula [1] y escribimos

$$U(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} F(x + y \operatorname{tg} \tau)\,d\tau \qquad (y > 0). \qquad [3]$$

Entonces, si

$$G(x, y, \tau) = F(x + y \operatorname{tg} \tau) - F(x)$$

y α es una pequeña constante positiva,

$$\pi[U(x, y) - F(x)] = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} G(x, y, \tau)\,d\tau = I_1(y) + I_2(y) + I_3(y), \qquad [4]$$

donde

$$I_1(y) = \int_{-\pi/2}^{(-\pi/2)+\alpha} G(x, y, \tau)\,d\tau, \quad I_2(y) = \int_{(-\pi/2)+\alpha}^{(\pi/2)-\alpha} G(x, y, \tau)\,d\tau,$$

$$I_3(y) = \int_{(\pi/2)-\alpha}^{\pi/2} G(x, y, \tau)\,d\tau.$$

Si denotamos por M una cota superior para $|F(x)|$, entonces $|G(x, y, \tau)| \leqq 2M$. Dado un número positivo ε, elegimos α de manera que $6M\alpha < \varepsilon$, lo que significa que

$$|I_1(y)| \leqq 2M\alpha < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{y} \quad |I_3(y) \leqq 2M\alpha < \frac{\varepsilon}{3}.$$

A continuación probamos que, correspondiendo a ε, existe un número positivo δ tal que

$$|I_2(y) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{si} \quad 0 < y < \delta.$$

A tal fin, observemos que, por la continuidad de F en x, existe un número positivo γ tal que

$$|G(x, y, \tau)| < \frac{\varepsilon}{3\pi} \quad \text{si} \quad 0 < y|\operatorname{tg} \tau| < \gamma.$$

El máximo valor de $|\text{tg } \tau|$ cuando τ varía desde $(-\pi/2) + \alpha$ a $(\pi/2) - \alpha$ es $\text{tg } (\pi/2) - \alpha = \text{cotg } \alpha$. Por tanto, si hacemos $\delta = \gamma \text{ tg } \alpha$, se deduce que

$$|I_2(y)| < \frac{\varepsilon}{3\pi}(\pi - 2\alpha) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{siempre que} \quad 0 < y < \delta.$$

Hemos demostrado así que

$$|I_1(y)| + |I_2(y)| + |I_3(y)| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad 0 < y < \delta.$$

La condición [2] se sigue ahora de este resultado y de la Ecuación [4].

La Fórmula [1] resuelve por tanto el problema de Dirichlet para el semiplano $y > 0$, con la condición de contorno [2]. Es evidente de la forma [3] de [1] que $|U(x, y)| \leqq M$ en el semiplano, siendo M una cota superior de $|F(x)|$; esto es, U es acotada. Hagamos constar que $U(x, y) = F_0$, cuando $F(x) = F_0$, donde F_0 es una constante.

De acuerdo con la Fórmula [8] de la Sección 97, bajo ciertas condiciones sobre F la función

$$V(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - t)F(t)}{(t - x)^2 + y^2}\,dt \qquad (y > 0) \qquad [5]$$

es una armónica conjugada de la función U dada por [1]. En efecto, *la Fórmula* [5] *proporciona una armónica conjugada de U si F es continua en todas partes, excepto a lo sumo un número finito de saltos, y F satisface una propiedad de orden* $|xaF(x)| < M$, *con* $a > 0$. Porque, en tales circunstancias, hallamos que U y V verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann para $y > 0$.

En los ejercicios se tratan los casos especiales de la Fórmula [1] en que F es para o impar.

99. PROBLEMA DE NEUMANN PARA UN DISCO

Al igual que en la Sección 94 y en la Figura 125, escribimos $s = r_0 \exp(i\phi)$ y $z = r \exp(i\theta)$, donde $r < r_0$. Para s fijo, la función

$$Q(r_0, r, \phi - \theta) = -2r_0 \ln|s - z| = -r_0 \ln[r_0^2 - 2r_0 r \cos(\phi - \theta) + r^2] \quad [1]$$

es armónica en el interior del círculo $|z| = r_0$ porque es la parte real de $-2r_0 \log(z - s)$, donde el corte de ramificación de $\log(z - s)$ es un rayo que arranca del punto s. Si además $r \neq 0$,

$$Q_r(r_0, r, \phi - \theta) = -\frac{r_0}{r}\left[\frac{2r^2 - 2r_0 r \cos(\phi - \theta)}{r_0^2 - 2r_0 r \cos(\phi - \theta) + r^2}\right] = \qquad [2]$$

$$= \frac{r_0}{r}[P(r_0, r, \phi - \theta) - 1],$$

donde P es el núcleo de Poisson [7] de la Sección 94.

Estas observaciones sugieren que la función Q puede ser utilizada para escribir una representación integral de una función armónica U cuya derivada normal U_r sobre el círculo $r = r_0$ toma valores prefijados $G(\theta)$.

Si G es continua a trozos y U_0 es una constante arbitraria, la función

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(r_0, r, \phi - \theta)G(\phi)\,d\phi + U_0 \qquad (r < r_0) \qquad [3]$$

es armónica porque el integrando es una función armónica de r y θ. Si el valor medio de G sobre el círculo $|z| = r_0$ es cero, o sea

$$\int_0^{2\pi} G(\phi)\,d\phi = 0, \qquad [4]$$

entonces, en vista de [2],

$$U_r(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r_0}{r}[P(r_0, r, \phi - \theta) - 1]G(\phi)\,d\phi =$$

$$= \frac{r_0}{r}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta)G(\phi)\,d\phi.$$

Ahora bien, según las Ecuaciones [1] y [2] de la Sección 95,

$$\lim_{\substack{r \to r_0 \\ r < r_0}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(r_0, r, \phi - \theta)G(\phi)\,d\phi = G(\theta).$$

En consecuencia

$$\lim_{\substack{r \to r_0 \\ r < r_0}} U_r(r, \theta) = G(\theta) \qquad [5]$$

para todo θ en el que G es continua.

Si G es continua a trozos y cumple la condición [4], la fórmula

$$U(r, \theta) = -\frac{r_0}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln[r_0^2 - 2r_0 r \cos(\phi - \theta) + r^2]G(\phi)\,d\phi + U_0 \qquad (r < r_0) \quad [6]$$

resuelve, por tanto, el problema de Newmann para la región interior al círculo $r = r_0$, donde $G(\theta)$ es la derivada normal de la función armónica $U(r, \theta)$ en la frontera en el sentido de la condición [5]. Nótese cómo se deduce de [4] y [6] que, por ser $\ln r_0^2$ es constante, U_0 es el valor de U en el centro $r = 0$ del círculo $r = r_0$.

Los valores $U(r, \theta)$ pueden representar temperaturas estacionarias en un disco $r < r_0$ con caras aisladas. En tal caso, [5] establece que el flujo de calor en el

disco a través de su borde es proporcional a $G(\theta)$. La condición [4] es el requisito físico natural de que el ritmo total del flujo de calor en el disco ha de ser cero, ya que las temperaturas no varían con el tiempo.

Una fórmula correspondiente para una función armónica H en la región *exterior* al círculo $r = r_0$ se puede expresar en términos de Q como

$$H(R, \psi) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(r_0, R, \phi - \psi)G(\phi)\,d\phi + H_0 \qquad (R > r_0), \quad [7]$$

con H_0 constante. Como antes, suponemos que G es continua a trozos y que [4] se cumple. Entonces

$$H_0 = \lim_{R\to\infty} H(R, \psi)$$

y

$$\lim_{\substack{R\to r_0 \\ R>r_0}} H_R(R, \psi) = G(\psi) \qquad [8]$$

para todo ψ en el que G sea continua.

La comprobación de [7], así como casos especiales de [3] que se aplican a regiones semicirculares, se relegan a los ejercicios.

100. PROBLEMA DE NEUMANN PARA UN SEMIPLANO

Sea $G(x)$ continua en todo x real, excepto en un número finito de saltos finitos, y tal que satisface una propiedad de orden

$$|x^a G(x)| < M \qquad (-\infty < x < \infty), \qquad [1]$$

con $a > 1$. Fijado cualquier número real t, la función $\text{Log}\,|z - t|$ es armónica en el semiplano $\text{Im}\,z > 0$. Por consiguiente, la función

$$U(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln|z - t|G(t)\,dt + U_0 = \qquad [2]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \ln[(t - x)^2 + y^2]G(t)\,dt + U_0 \qquad (y > 0),$$

donde U_0 es una constante real, es armónica en ese semiplano.

La Fórmula [2] se ha escrito con la transformada integral de Schwarz [1], Sección 98, en mente; porque se deduce de [2] que

$$U_y(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yG(t)}{(t - x)^2 + y^2}\,dt \qquad (y > 0). \qquad [3]$$

A la vista de [1] y [2] de la Sección 98, se tiene

$$\lim_{\substack{y\to 0 \\ y>0}} U_y(x, y) = G(x) \qquad [4]$$

en todo punto x en que G sea continua.

La fórmula integral [2] resuelve evidentemente *el problema de Neumann para el semiplano* $y > 0$, con condición de contorno [4]. Pero no hemos concretado condiciones sobre G que sean suficientes para garantizar que la función armónica U se mantenga acotada cuando $|z|$ crece.

Si G es una función impar, la Fórmula [2] puede escribirse

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \ln\left[\frac{(t - x)^2 + y^2}{(t + x)^2 + y^2}\right]G(t)\,dt \qquad (x > 0, y > 0). \quad [5]$$

Esto representa una función armónica en el *primer cuadrante* $x > 0$, $y > 0$, que satisface las condiciones de contorno

$$U(0, y) = 0 \qquad (y > 0), \qquad [6]$$

$$\lim_{\substack{y\to 0 \\ y>0}} U_y(x, y) = G(x) \qquad (x > 0). \qquad [7]$$

Los núcleos de las fórmulas integrales para función armónicas presentadas en este capítulo pueden ser descritos en términos de una sola función real de las variables complejas $z = x + iy$ y $w = u + iv$:

$$K(z, w) = \ln|z - w| \qquad (z \neq w). \qquad [8]$$

Esta es la *función de Green para el potencial logarítmico* en el plano z. La función es simétrica, esto es, $K(w, z) = K(z, w)$. En los ejercicios se dan expresiones de los núcleos usados antes, en términos de K y de sus derivadas.

EJERCICIOS

1. Obtener, como caso especial de [1], Sección 98, la expresión

$$U(x, y) = \frac{y}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{(t - x)^2 + y^2} - \frac{1}{(t + x)^2 + y^2}\right]F(t)\,dt \qquad (x > 0, y > 0)$$

para una función acotada U que sea armónica en el *primer cuadrante* y que cumpla las condiciones de contorno

$$U(0, y) = 0 \qquad (y > 0),$$

$$\lim_{\substack{y\to 0 \\ y>0}} U(x, y) = F(x) \qquad (x > 0, x \neq x_j),$$

donde F es acotada para todo x positivo y continua, excepto a lo sumo en un número finito de saltos finitos en los puntos x_j ($j = 1, 2, ..., n$).

2. Como caso especial de la Fórmula [1], Sección 98, obtener la expresión

$$U(x, y) = \frac{y}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{1}{(t-x)^2+y^2} + \frac{1}{(t+x)^2+y^2}\right]F(t)\,dt \qquad (x > 0,\ y > 0)$$

para una función acotada U que sea armónica en el primer cuadrante y que satisfaga las condiciones de contorno

$$U_x(0, y) = 0 \qquad (y > 0),$$
$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} U(x, y) = F(x) \qquad (x > 0,\ x \neq x_j),$$

donde F es acotada para x positivos y continua, excepto a lo sumo en un número finito de saltos finitos en los puntos x_j ($j = 1, 2, ..., n$).

3. Intercambiar los ejes x e y en la Sección 98 para escribir la solución

$$U(x, y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xF(t)}{(t-y)^2 + x^2}\,dt \qquad (x > 0)$$

del problema de Dirichlet para el semiplano $x > 0$. Denotar

$$F(y) = \begin{cases} 1 & \text{para } -1 < y < 1, \\ 0 & \text{para } |y| > 1, \end{cases}$$

y obtener estas expresiones para U y su armónica conjugada $-V$:

$$U(x, y) = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{y+1}{x} - \operatorname{arctg}\frac{y-1}{x}\right), \quad V(x, y) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{x^2+(y+1)^2}{x^2+(y-1)^2},$$

donde $-\pi/2 \leqq \operatorname{arctg} t \leqq \pi/2$. Probar además que

$$V(x, y) + iU(x, y) = \frac{1}{\pi}[\operatorname{Log}(z + i) - \operatorname{Log}(z - i)],$$

donde $z = x + iy$.

4. Sean $T(x, y)$ las temperaturas estacionarias acotadas en una placa $x > 0$, $y > 0$, con sus caras aisladas, cuando

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} T(x, y) = F_1(x) \qquad (x > 0),$$
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} T(x, y) = F_2(y) \qquad (y > 0)$$

(Fig. 131). Aquí F_1 y F_2 son acotadas y continuas, excepto a lo sumo en un número finito de saltos finitos. Poniendo $x + iy = z$, probar con ayuda de las expresiones deducidas en el Ejercicio 1 que

$$T(x, y) = T_1(x, y) + T_2(x, y) \qquad (x > 0,\ y > 0),$$

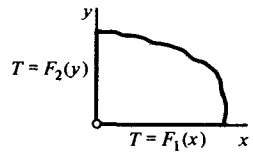


Figura 131

donde

$$T_1(x, y) = \frac{y}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{|t-z|^2} - \frac{1}{|t+z|^2}\right)F_1(t)\,dt,$$
$$T_2(x, y) = \frac{y}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{1}{|it-z|^2} - \frac{1}{|it+z|^2}\right)F_2(t)\,dt.$$

5. Establecer la Fórmula [7], Sección 99, como solución del problema de Neumann para la región exterior a un círculo $r = r_0$, usando resultados precedentes de esa sección.

6. Obtener como caso especial de [3], Sección 99, la expresión

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [Q(r_0, r, \phi - \theta) - Q(r_0, r, \phi + \theta)]G(\phi)\,d\phi$$

para una función U que sea armónica en la *región semicircular* $r < r_0$, $0 < \theta < \pi$ y que satisfaga las condiciones de contorno

$$U(r, 0) = U(r, \pi) = 0 \qquad (r < r_0),$$
$$\lim_{\substack{r\to r_0\\ r<r_0}} U_r(r, \theta) = G(\theta) \qquad (0 < \theta < \pi)$$

para cada θ en el que G es continua.

7. Obtener, como caso especial de [3], Sección 99, la expresión

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi [Q(r_0, r, \phi - \theta) + Q(r_0, r, \phi + \theta)]G(\phi)\,d\phi + U_0$$

para una función U armónica en la *región semicircular* $r < r_0$, $0 < \theta < \pi$ que satisfaga las condiciones de contorno

$$U_\theta(r, 0) = U_\theta(r, \pi) = 0 \qquad (r < r_0),$$
$$\lim_{\substack{r\to r_0\\ r<r_0}} U_r(r, \theta) = G(\theta) \qquad (0 < \theta < \pi)$$

para todo θ en el que G es continua, supuesto que

$$\int_0^\pi G(\phi)\,d\phi = 0.$$

8. Denotemos por $T(x, y)$ las temperaturas estacionarias en una placa $x \geqq 0, y \geqq 0$. Sus caras están aisladas, con $T = 0$ en el borde $x = 0$. El flujo de calor (Sec. 78) en la placa a lo largo del segmento $0 < x < 1$ del borde $y = 0$ es una constante A, y el resto de ese borde está aislado. Usar la Fórmula [5], Sección 100, para demostrar que el flujo que sale de la placa por el borde $x = 0$ es

$$\frac{A}{\pi} \ln \left(1 + \frac{1}{y^2}\right).$$

9. Probar que el núcleo de Poisson (Sec. 94) viene dado en términos de la función de Green

$$K(z, w) = \ln |z - w| = \frac{1}{2} \ln [\rho^2 - 2\rho r \cos (\phi - \theta) + r^2],$$

donde $z = r \exp (i\theta)$ y $w = \rho \exp (i\phi)$, por la ecuación

$$P(\rho, r, \phi - \theta) = 2\rho \frac{\partial K}{\partial \rho} - 1.$$

10. Probar que el núcleo utilizado en la transformación integral de Schwarz (Sec. 98) se puede escribir en términos de la función de Green

$$K(z, w) = \ln |z - w| = \frac{1}{2} \ln [(x - u)^2 + (y - v)^2],$$

donde $z = x + iy$ y $w = u + iv$, como

$$\frac{y}{|u - z|^2} = \frac{\partial K}{\partial y}\bigg]_{v=0} = -\frac{\partial K}{\partial v}\bigg]_{v=0}.$$

Aquí ha de interpretarse K como una función de las cuatro variables reales x, y, u y v.

CAPITULO

DOCE

TEORIA DE FUNCIONES COMPLEMENTARIA

Muchas cuestiones que no eran esenciales para la continuidad de la presentación de los capítulos precedentes se han ido omitiendo. Algunas de ellas, sin embargo, pueden tener cabida en un curso elemental, y por esa razón las presentaremos en este capítulo.

101. CONDICIONES BAJO LAS CUALES $f(z) \equiv 0$

Prolongamos el enunciado y demostración del teorema de esta sección con un lema útil.

Lema. *Si $f(z) = 0$ en todo punto z de un dominio o arco que contiene a un punto z_0, entonces $f(z) \equiv 0$ en cualquier entorno N_0 de z_0 en el que f sea analítica. Esto es, $f(z) = 0$ en todo punto z de N_0.*

Para demostrarlo, necesitamos el hecho de que, bajo las condiciones impuestas, f es idénticamente cero en algún entorno N de z_0. En efecto, de lo contrario existiría un entorno punteado de z_0 en el que $f(z) \neq 0$ (véase Ejerc. 8, Sec. 57); y ello sería inconsistente con la condición de que $f(z) \equiv 0$ en un dominio o arco que contiene a z_0. Ya que $f(z) \equiv 0$ en el entorno N, se deduce que todos los coeficientes $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ de la serie de Taylor de $f(z)$ centrada en z_0 han de ser nulos. Luego $f(z) \equiv 0$ en el entorno N_0, pues la serie de Taylor también representa a $f(z)$ en N_0.

Teorema. *Si una función f es analítica en un dominio D y $f(z) = 0$ en todo punto de un dominio o arco interior a D, entonces $f(z) \equiv 0$ en D.*

El método de demostración va a ser similar al empleado en el teorema de la Sección 42. Sea z_0 cualquier punto del dominio o arco interior a D donde $f(z) \equiv 0$; y construyamos una línea poligonal L desde z_0 hasta cualquier otro punto P en D. Denotemos además por d la mínima distancia desde los puntos

de L a la frontera de D. Cuando D es todo el plano, d puede tomarse como cualquier número positivo.

Ahora debe existir una sucesión finita de puntos $z_0, z_1, z_2, ..., z_n$ sobre L tales que z_n coincide con P y

$$|z_k - z_{k-1}| < d \qquad (k = 1, 2, ..., n).$$

Formando una sucesión finita de entornos $N_0, N_1, N_2, ..., N_n$, donde cada N_k está centrado en z_k y tiene radio d, observamos que f es analítica en cada uno de esos entornos y que el centro de cada $N_k (k = 1, 2, ..., n)$ está en el entorno N_{k-1} (véase Fig. 44 en la Sec. 42).

Como f es analítica en el entorno N_0 y debido a la elección del punto z_0, nuestro lema nos dice que $f(z) \equiv 0$ en N_0. Pero el punto z_1 está en el entorno, o dominio, N_0. Por tanto, una segunda aplicación del lema revela que $f(z) \equiv 0$ en N_1; y siguiendo este proceso, llegamos a la conclusión de que $f(z) \equiv 0$ en N_n. Puesto que N_n está centrado en el punto P y P era arbitrario en D, concluimos que $f(z) \equiv 0$ en D. El teorema queda probado.

Supongamos ahora que dos funciones f y g son analíticas en un mismo dominio D y que $f(z) = g(z)$ en todo punto de algún dominio o arco contenido en D. La función h definida por $h(z) = f(z) - g(z)$ es también analítica en D, y $h(z) = 0$ sobre el subdominio o a lo largo del arco. Según el teorema, $h(z) = 0$ sobre D; esto es, $f(z) = g(z)$ cuando z está en D. Así llegamos al siguiente corolario.

Corolario. *Una función analítica en un dominio D está unívocamente determinada en D por sus valores en un dominio o arco interior a D.*

Ejemplo. Como $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, la función entera

$$f(z) = \text{sen}^2 z + \cos^2 z - 1$$

es nula sobre el eje real. En consecuencia, por el teorema anterior, debe ser nula en todo el plano complejo, lo cual significa que

$$\text{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$$

para todo z. Nótese asimismo cómo el corolario nos dice que sen z y cos z son las únicas funciones enteras que pueden tomar los valores sen x y cos x, respectivamente, sobre el eje real.

102. PROLONGACION ANALITICA

La intersección de dos dominios D_1 y D_2 es el dominio $D_1 \cap D_2$ que consta de los puntos comunes a D_1 y D_2. Si los dos dominios tienen puntos en común, entonces su unión $D_1 \cup D_2$, formado por la totalidad de puntos de D_1 y de D_2, también es un dominio.

Si tenemos dos dominios D_1 y D_2 con puntos comunes (Fig. 132) y una función f_1 analítica en D_1, puede existir una función f_2, analítica en D_2, tal que $f_2(z) = f_1(z)$ para todo z en la intersección $D_1 \cap D_2$. Si es así, llamaremos a F_2 una *prolongación analítica* de f_1 en el dominio D_2.

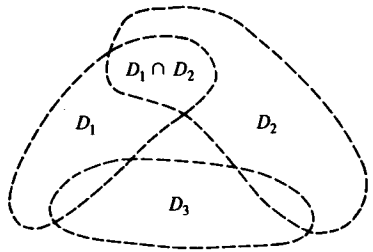


Figura 132

Siempre que existe esa prolongación analítica f_2, es única, de acuerdo con el corolario de la Sección 101. En efecto, no puede haber más de una función que sea analítica en D_2 y tome el valor $f_1(z)$ en todo punto z del dominio $D_1 \cap D_2$ interior a D_2. No obstante, si existe una prolongación analítica f_3 de f_2 de D_2 en un dominio D_3 *que intersecta al* D_1, como indica la Figura 132, no es necesariamente cierto que $f_3(z) = f_1(z)$ en todo z de $D_1 \cap D_3$. En el Ejemplo 3 aquí abajo ilustraremos este hecho de que una cadena de prolongaciones de una función dada sobre D_1 puede llevar a una función final diferente definida en el propio D_1.

Si f_2 es la prolongación analítica de f_1 desde el dominio D_1 al dominio D_2, entonces la función F definida por

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{si } z \text{ está en } D_1, \\ f_2(z) & \text{si } z \text{ está en } D_2 \end{cases}$$

es analítica en la unión $D_1 \cup D_2$. La función F es la prolongación analítica en $D_1 \cup D_2$ tanto de f_1 como de f_2, y f_1, f_2 se llaman *elementos* de F.

Ejemplo 1. Consideremos en primer lugar la función f_1 definida por

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n. \qquad [1]$$

Esta serie de potencias converge a $1/(1 - z)$ cuando $|z| < 1$ (Sec. 46). Diverge cuando $|z| \geq 1$, ya que entonces la norma del término n-ésimo z^n no tiende a cero cuando n tiende a infinito. Por consiguiente,

$$f_1(z) = \frac{1}{1 - z} \quad \text{para} \quad |z| < 1,$$

y f_1 no está definida para $|z| \geq 1$.

En cuanto a la función

$$f_2(z) = \frac{1}{1 - z} \qquad (z \neq 1) \qquad [2]$$

está definida y es analítica en todas partes excepto en el punto $z = 1$. Como $f_2(z) = f_1(z)$ dentro del círculo $|z| = 1$, la función f_2 es la prolongación analítica de f_1 en el dominio consistente en todos los puntos del plano z, excepto $z = 1$. Es la única posible prolongación analítica de f_1 en ese dominio, de acuerdo con las observaciones del comienzo de esta sección. En este ejemplo, f_1 es también un elemento de f_2.

Conviene hacer constar que si empezamos con la información de que la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

converge para $|z| < 1$ y que su suma es $1/(1 - x)$ cuando $z = x$, podemos concluir que su suma es $1(1 - z)$ siempre que $|z| < 1$. Una serie de potencias convergente representa una función analítica, y $1/(1 - z)$ es la función analítica en el interior del círculo $|z| = 1$ que toma los valores $1/(1 - x)$ a lo largo del segmento del eje x interior a ese círculo.

Ejemplo 2. Consideremos la función

$$f_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt}\, dt. \qquad [3]$$

Como se vio en el Ejercicio 1c), Sección 31, esta integral existe sólo cuando Re $z > 0$, siendo su valor $1/z$. Por tanto, podemos escribir

$$f_1(z) = \frac{1}{z} \qquad (\text{Re } z > 0) \qquad [4]$$

El dominio de definición Re $z > 0$ se denota por D_1 en la Figura 133, y f_1 es analítica allí. Sea f_2 definida por la serie geométrica:

$$f_2(z) = i \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z + i}{i}\right)^n \qquad (|z + i| < 1). \qquad [5]$$

Dentro de su círculo de convergencia, que es el círculo unidad centrado en el punto $z = i$, la serie es convergente. Más concretamente,

$$f_2(z) = i \frac{1}{1 - (z + i)/i} = \frac{1}{z} \qquad [6]$$

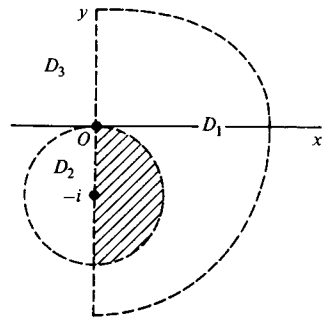


Figura 133

cuando z está en el dominio $|z + i| < 1$, denotado D_2. Evidentemente, $f_2(z) = f_1(z)$ en todo z de la intersección $D_1 \cap D_2$, y f_2 es la prolongación analítica de f_1 en D_2.

La función $F(z) = 1/z$ $(z \neq 0)$ es la prolongación analítica tanto de f_1 como de f_2 en el dominio D_3 que consta de todo el plano z, salvo el origen. Las funciones f_1 y f_2 son elementos de F.

Ejemplo 3. Consideremos finalmente esta rama de $z^{1/2}$:

$$f_1(z) = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2} \qquad (r > 0, 0 < \theta < \pi).$$

Una prolongación analítica de f_1 a través del eje real negativo en el semiplano inferior es

$$f_2(z) = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2} \qquad \left(r > 0, \frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi\right).$$

Una prolongación analítica de f_2 a través del eje real positivo en el primer cuadrante es, entonces,

$$f_3(z) = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2} \qquad \left(r > 0, \pi < \theta < \frac{5\pi}{2}\right).$$

Nótese que $f_3(z)$ $f_1(z)$ en el primer cuadrante; de hecho, $f_3(z) = -f_1(z)$ allí.

103. PRINCIPIO DE REFLEXION

En el Capítulo 3 vimos que algunas funciones elementales $f(z)$ poseen la propiedad de que $f(\bar{z}) = f(z)$ para todo punto z en un cierto dominio, y otras no.

Ejemplos. Las funciones

$$z, \quad z^2 + 1, \quad e^z, \quad \text{sen } z$$

tienen esa propiedad, porque al sustituir z por su conjugado el valor de tales funciones pasa a ser el conjugado del valor original. Por otra parte, las funciones

$$iz, \quad z^2 + i, \quad e^{iz}, \quad (1 + i) \text{ sen } z$$

no tienen esa propiedad de que la reflexión de z en el eje real corresponda a la reflexión de $f(z)$ en el eje real.

El siguiente teorema, conocido como princpio de reflexión, explica esas observaciones.

Teorema. *Sea f una función analítica en algún dominio D que incluye un segmento del eje x y es simétrico respecto del eje x. Si $f(z)$ es real siempre que x es un punto de ese segmento, entonces*

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \qquad [1]$$

siempre que z sea un punto de D. Recíprocamente, si se satisface la condición [1], entonces $f(x)$ es real.

La Ecuación [1] representa la misma condición sobre f que la ecuación

$$\overline{f(\bar{z})} = f(z), \qquad [2]$$

donde $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y

$$\overline{f(\bar{z})} = u(x, -y) - iv(x, -y). \qquad [3]$$

Cuando se satisface la condición [2] en un punto $(x, 0)$ del eje real,

$$u(x, 0) - iv(x, 0) = u(x, 0) + iv(x, 0).$$

Por tanto, $v(x, 0) = 0$ y $f(x)$ es real. La afirmación recíproca del teorema es, pues, cierta.

Para demostrar la afirmación directa, hemos de probar antes que la función $\overline{f(\bar{z})}$ es analítica en el dominio D. Escribimos

$$F(z) = \overline{f(\bar{z})} = U(x, y) + iV(x, y).$$

Entonces, según [3],

$$U(x, y) = u(x, t), \qquad V(x, y) = -v(x, t) \qquad [4]$$

donde $t = -y$. Como $f(x + it)$ es una función analítica de $x + it$, las funciones $u(x, t)$ y $v(x, t)$, junto con sus derivadas parciales, son continuas sobre D, y en él se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_t, \qquad u_t = -v_x \qquad [5]$$

Ahora bien, en vista de las ecuaciones [4],

$$U_x = u_x, \qquad V_y = -v_t \frac{dt}{dy} = v_t;$$

y se desprende de ellas y de la primera ecuación en [5] que $U_x = V_y$. Análogamente, $U_y = -V_x$. Estas derivadas parciales de U, V son continuas, y la función

$$F(z) = \overline{f(\bar{z})}$$

es, por tanto, analítica en D.

Dado que $f(x)$ es real, $v(x, 0) = 0$. Luego

$$F(x) = U(x, 0) + iV(x, 0) = u(x, 0);$$

es decir, $F(z) = f(z)$ si el punto z está en el segmento del eje x interior al dominio D. Del corolario de la Sección 101 se sigue que $F(z) = f(z)$ en todo punto z de D, pues ambas son funciones analíticas allí. Así pues, la condición [2] queda establecida, y probado con ello el teorema.

EJERCICIOS

1. Recordando que las funciones seno y coseno hiperbólicos, la exponencial y las funciones seno y coseno son todas enteras, usar el teorema de la Sección 101 para obtener cada una de estas identidades para todo z complejo, a partir de las identidades correspondientes cuando z es real:

   a) $\text{senh } z + \cosh z = e^z$; *b)* $\text{sen } 2z = \text{sen } z \cos z$;

   c) $\cosh^2 z - \text{senh}^2 z = 1$; *d)* $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$.

2. Probar que la función

   $$f_2(z) = \frac{1}{z^2 + 1} \qquad (z \neq \pm i)$$

   es la prolongación analítica de la función

   $$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \qquad (|z| < 1)$$

   en el dominio que consiste en todo el plano z, excepto $z = \pm i$.

3. Demostrar que la función $f_2(z) = 1/z^2 (z \neq 0)$ es la prolongación analítica de la función

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1)(z + 1)^n \qquad (|z + 1| < 1)$$

en el dominio que consta de todo el plano z, salvo $z = 0$.

4. Explicar por qué la función

$$f_4(z) = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2} \qquad (r > 0, -\pi < \theta < \pi)$$

es la prolongación analítica de la función (Ej. 3, Sec. 102)

$$f_1(z) = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2} \qquad (r > 0, 0 < \theta < \pi)$$

a través del eje real positivo en el semiplano inferior.

5. Hallar la prolongación analítica de Log z desde el semiplano superior Im $z > 0$ al semiplano inferior a través del eje real negativo. Nótese que esta prolongación analítica es diferente de Log z en el semiplano inferior.

Sol. $\ln r + i\theta \; (r > 0, 0 < \theta < 2\pi)$.

6. Hallar la prolongación analítica de la función

$$f(z) = \int_0^{\infty} te^{-zt}\, dt \qquad (\text{Re } z > 0)$$

en el dominio formado por todo el plano z, excluido el origen.

Sol. $1/z^2$.

7. Probar que la función $1/(z^2 + 1)$ es la prolongación analítica de la función

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} \operatorname{sen} t\, dt \qquad (\text{Re } z > 0)$$

en el dominio consistente en todo el plano z, excepto $z = \pm i$.

8. Demostrar que si en el teorema de la Sección 103 se sustituye la condición de que $f(x)$ sea real por la de que $f(x)$ sea imaginario puro, la conclusión cambia a

$$f(\bar{z}) = -\overline{f(z)}.$$

9. Usar el corolario de la Sección 101 para probar que si una función $f(z)$ es analítica y no constante sobre un dominio D, entonces no es constante en ningún entorno en D.

Sugerencia: Supóngase que f tuviese un valor constante w_0 sobre un entorno en D.

104. PUNTOS SINGULARES EVITABLES Y ESENCIALES

El comportamiento de una función cerca de un polo ha sido mencionado en la Sección 57 y en sus Ejercicios 9 y 10. En esta sección presentamos dos importantes teoremas que describen el comportamiento de funciones cerca de los otros dos tipos de puntos singulares aislados, los evitables y los esenciales.

El primer teorema, debido a Riemann, se refiere a los puntos singulares evitables.

Teorema 1. *Si f es acotada y analítica en un entorno punteado $0 < |z - z_0| < \delta$ de un punto z_0, entonces o bien f es analítica en z_0 o bien z_0 es un punto singular evitable de f.*

Para demostrar esto, suponemos satisfechas las condiciones impuestas sobre f y observamos que f viene representada por una serie de Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \qquad (0 < |z - z_0| < \delta). \quad [1]$$

Si C denota un círculo orientado positivamente $|z - z_0| = \rho$, con $\rho < \delta$, entonces los coeficientes b_n son (Sec. 47)

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^{-n+1}} \qquad (n = 1, 2, \ldots). \quad [2]$$

Por ser f acotada en el entorno punteado, existe un número positivo M tal que

$$|f(z)| < M \qquad (0 < |z - z_0| < \delta).$$

De [2] se deduce que

$$|b_n| \leqq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho^{-n+1}} 2\pi\rho = M\rho^n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Como los coeficientes b_n son constantes y ρ se puede escoger arbitrariamente pequeño, podemos concluir que $b_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Así que la serie [1] se reduce a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \qquad (0 < |z - z_0| < \delta). \quad [3]$$

Si $f(z_0) = a_0$, esta representación en serie de potencias es válida en el entorno $|z - z_0| < \delta$, en cuyo caso f debe ser analítica en z_0. En caso contrario, f puede hacerse analítica en z_0 poniendo $f(z_0) = a_0$. El punto z_0 es, pues, un punto singular evitable de f. Esto completa la demostración del teorema .

El comportamiento de una función en las proximidades de un punto singular esencial es muy irregular. Ya se anunció en la Sección 55, donde se formuló el teorema de Picard, a saber, *en todo entorno de un punto singular esencial, la función toma todo valor finito, con una sola excepción posible, un número infinito de veces*. Se ilustró este hecho en el Ejemplo 4 de esa sección, probando que la función $\exp(1/z)$, que tiene un punto singular esencial en el origen, toma el valor -1 un número infinito de veces en cualquier entorno de ese punto singular. No vamos a probar el teorema de Picard, pero sí uno de Weierstrass relacionado, que muestra cómo el valor de una función es arbitrariamente próximo a cualquier número prefijado c en ciertos puntos arbitrariamente próximos a un punto singular esencial de esa función.

Teorema 2. *Sea z_0 un punto singular esencial de una función f, y sea c cualquier número complejo dado. Entonces para cada número positivo ε, por pequeño que sea, la desigualdad*

$$|f(z) - c| < \varepsilon \qquad [4]$$

se satisface en algún punto z de todo entorno punteado de z_0.

Para demostrar el teorema, consideremos un entorno punteado $0 < |z - z_0| < \delta$ de z_0, con δ suficientemente pequeño para que f sea analítica allí, y supongamos que [4] no se cumple en ningún punto de ese entorno punteado. En tal caso, $|f(z) - c| \geq \varepsilon$ para todos esos puntos, y la función

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - c} \qquad (0 < |z - z_0| < \delta) \qquad [5]$$

es acotada y analítica. Según el Teorema 1, z_0 es un punto singular evitable de g. Definamos $g(z_0)$ de modo que g sea analítica en z_0. Como f no puede ser constante, tampoco g puede serlo y, a la vista de la serie de Taylor para g en z_0, o es $g(z_0) \neq 0$ o g tiene en z_0 un cero de orden finito. En consecuencia, su recíproca,

$$\frac{1}{g(z)} = f(z) - c,$$

o bien es analítica en z_0 o bien tiene en z_0 un polo (véase Sec. 57). Pero esto contradice la hipótesis de que z_0 sea un punto singular esencial de f. Por tanto, la condición [4] ha de satisfacerse en algún punto del entorno punteado dado.

105. PRINCIPIO DEL ARGUMENTO

Sea C un contorno cerrado simple orientado positivamente en el plano z, y sea f una función analítica dentro de y sobre C con la posible excepción de polos interiores a C. Supongamos además que f no tiene ceros sobre C. La imagen Γ de

C bajo la transformación $w = f(z)$ es un entorno cerrado en el plano w (Fig. 134). Cuando un punto z recorre C en sentido positivo, su imagen w recorre Γ en una determinada dirección que fija sobre Γ una orientación.

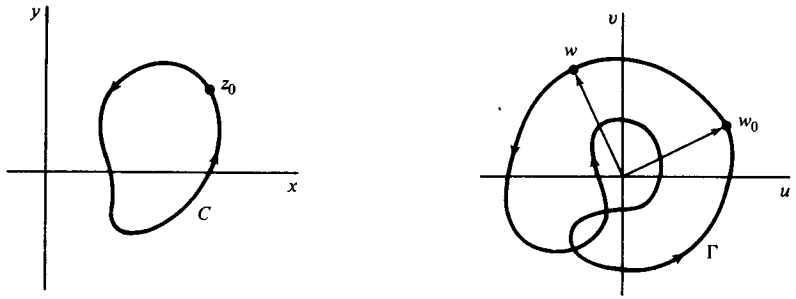


Figura 134. $w = f(z)$.

Como f no tiene ceros sobre C, el contorno Γ no pasa por el origen del plano w. Sea w_0 un punto fijado de Γ, y sea ϕ_0 un valor de $\arg w_0$. Hagamos variar ahora de modo continuo el $\arg w$, partiendo del valor ϕ_0, mientras el punto w arranca de w_0 y recorre Γ una vez en el sentido que le ha asignado la transformación $w = f(z)$. Cuando w vuelve al punto inicial w_0, $\arg w$ toma un valor particular de $\arg w_0$ que denotaremos por ϕ_1. Así pues, el cambio en $\arg w$ al describir w una vez Γ en su sentido de orientación es $\phi_1 - \phi_0$. Nótese que este cambio es independiente del punto particular w_0 escogido para determinarlo.

El número $\phi_1 - \phi_0$ es también el cambio en el argumento $f(z)$ cuando z describe C una vez en sentido positivo, y escribimos

$$\Delta_C \arg f(z) = \phi_1 - \phi_0. \qquad [1]$$

El valor de $\Delta_C \arg f(z)$ es un múltiplo entero de 2π, y el entero

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z)$$

representa el número de veces que el punto w gira en torno al origen en el plano w cuando z describe C una vez en sentido positivo. Si, por ejemplo, este entero es -1, entonces Γ da una vuelta en torno al origen en sentido de las agujas de un reloj. En la Figura 134 el valor de $\Delta_C \arg f(z)$ es cero. El valor de $\Delta_C \arg f(z)$ es siempre cero cuando el contorno Γ no encierra al origen $w = 0$. Dejamos como ejercicio la verificación de este hecho en un caso especial.

El valor de $\Delta_C \arg f(z)$ puede determinarse a partir del número de ceros y polos de f interiores a C. Recordemos del Ejercicio 11, Sección 63, que esos ceros y polos son necesariamente finitos en número.

Teorema. *Sea C un contorno cerrado simple, descrito en sentido positivo, y sea f una función que es analítica dentro de y sobre C, excepto posiblemente en*

polos interiores a C. Supongamos además que f no tiene ceros sobre C. Entonces

$$\frac{1}{2\pi}\,\Delta_C \arg f(z) = N - P, \qquad [2]$$

donde N y P son el número de ceros y el número de polos de f, contados con sus multiplicidades, interiores a C.

Nuestra demostración de este resultado, conocido como *principio del argumento*, se basa en la igualdad

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P,$$

obtenida en el Ejercicio 9 de la Sección 63. Si C se expresa paramétricamente como $z = z(t)(a \leqq t \geqq b)$, una representación paramétrica de su imagen Γ bajo la transformación $w = f(z)$ es

$$w = w(t) = f[z(t)] \qquad (a \leqq t \geqq b).$$

Ahora bien, de acuerdo con el Ejercicio 10, Sección 31,

$$w'(t) = f'[z(t)]z'(t)$$

a lo largo de cada uno de los arcos suaves que constituyen el contorno Γ. Puesto que $z'(t)$ y $w'(t)$ son continuas a trozos en el intervalo $a \leqq t \leqq b$, podemos escribir

$$\int_a^b \frac{f'[z(t)]}{f[z(t)]}\,z'(t)\,dt = \int_a^b \frac{w'(t)}{w(t)}\,dt.$$

Es decir,

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_\Gamma \frac{dw}{w}.$$

De manera que la Ecuación [3] se convierte en

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dw}{w} = N - P. \qquad [4]$$

Como Γ nunca pasa por el origen del plano w, podemos expresar cada punto de ese contorno en forma exponencial como $w = \exp(i\phi)$. Si representamos entonces Γ en términos de algún parámetro τ como

$$w = w(\tau) = \rho(\tau)\exp[i\phi(\tau)] \qquad (c \leqq \tau \leqq d),$$

obtenemos

$$w'(\tau) = \rho'(\tau)\exp[i\phi(\tau)] + \rho(\tau)\exp[i\phi(\tau)]i\phi'(\tau),$$

donde $\rho'(t)$ y $\phi'(t)$ son continuas a trozos en el intervalo $c \leq \tau \leq d$. Por tanto podemos escribir

$$\int_\Gamma \frac{dw}{w} = \int_c^d \frac{w'(\tau)}{w(\tau)}\,d\tau = \int_c^d \frac{\rho'(\tau)}{\rho(\tau)}\,d\tau + i\int_c^d \phi'(\tau)\,d\tau,$$

o sea

$$\int_\Gamma \frac{dw}{w} = \ln \rho(\tau)\Big]_c^d + i\phi(\tau)\Big]_c^d.$$

Pero $\rho(d) = \rho(c)$ y

$$\phi(d) - \phi(c) = \phi_1 - \phi_0 = \Delta_C \arg f(z).$$

En consecuencia,

$$\int_\Gamma \frac{dw}{w} = i\,\Delta_C \arg f(z). \qquad [5]$$

Ahora la expresión [2] se deduce inmediatamente de [4] y [5].

Una aplicación del principio del argumento aparece en el Ejercicio 7, en el que se esboza una demostración alternativa del teorema de Rouché (Sec. 63).

EJERCICIOS

1. Sea c un número complejo no nulo prefijado. Probar que la función $\exp(1/z)$, que tiene en $z = 0$ un punto singular esencial, toma el valor c un número infinito de veces en cualquier entorno del origen.

Sugerencia: Hacer $c = c_0\exp(i\gamma)$, con $c_0 > 0$, y probar que $\exp(1/z)$ toma el valor c en los puntos $z = r\exp(i\theta)$ cuando r y θ satisfacen las ecuaciones

$$r^2 = \frac{1}{\gamma^2 + (\ln c_0)^2}, \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{-\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + (\ln c_0)^2}}, \quad \cos\theta = \frac{\ln c_0}{\sqrt{\gamma^2 + (\ln c_0)^2}},$$

Obsérvese que r se puede hacer arbitrariamente pequeño añadiendo múltiplos enteros de 2π al ángulo γ, manteniendo c inalterado.

2. Demostrar que si una función f es analítica en un entorno punteado de un punto z_0 y si z_0 es un punto de acumulación (Sec. 8) de ceros de f, entonces o z_0 es un punto singular esencial de f o f es idénticamente nula.

Sugerencia: Recordar el Ejercicio 8 de la Sección 5.

3. Examinar los ceros de la función z^2 sen $(1/z)$, y aplicar el resultado obtenido en el Ejercicio 2 para probar que el origen es un punto singular esencial de esa función. Nótese que esta conclusión se sigue también de la naturaleza del desarrollo en serie de Laurent de esa función en el dominio $0 < |z| < \infty$.

4. Sea f una función analítica dentro de y sobre un contorno cerrado simple C, y supongamos que f no se anula en ningún punto de C. Sea la imagen de C bajo la transformación $w = f(z)$ el contorno cerrado Γ que muestra la Figura 135. Usando Γ, determinar el valor de $\Delta_C \arg f(z)$. Determinar asimismo el número de ceros de f interiores a C.

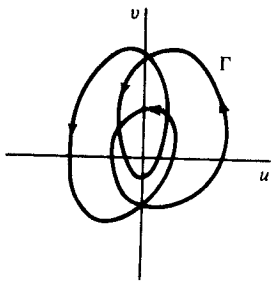


Figura 135

5. Sea C el círculo unidad $|z| = 1$ descrito en sentido positivo. Hallar el valor de $\Delta_C \arg f(z)$ para la función

$$a)\ f(z) = z^2; \quad b)\ f(z) = \frac{z^3 + 2}{z}.$$

Además, para cada una de las transformaciones definidas por esas funciones, hallar el número de veces que el punto imagen w gira en torno al origen del plano w cuando el punto z describe C una vez en sentido positivo.

Sol. *a)* 4π, 2; *b)* -2π, -1.

6. Con la notación de la Sección 105, probar que si Γ no encierra al origen $w = 0$ y existe un rayo que arranca de ese punto y no intersecta a Γ, entonces $\Delta_C \arg f(z) = 0$.

Sugerencia: El cambio en el valor de $\arg f(z)$ debe ser menor que 2π en valor absoluto cuando el punto z da una vuelta sobre C. Usar entonces el hecho de que $\Delta_C \arg f(z)$ es un múltiplo entero de 2π.

7. Sean f, g dos funciones analíticas dentro de y sobre un contorno cerrado simple C, y supongamos que $|f(z)| > |g(z)|$ en todo punto de C. Seguir los pasos descritos a continuación con el fin de lograr una demostración alternativa del teorema de Rouché (Sec. 63), que afirma que f y $f + g$ deben tener el mismo número de ceros, multiplicidades incluidas, interiores a C. Ya sabemos por la Sección 63 que f y $f + g$ no tienen ceros sobre C, al que suponemos orientado positivamente.

a) Razonar por qué bajo la transformación $w = 1 + [g(z)/f(z)]$ la imagen Γ de C está dentro del cículo $|w - 1| = 1$, y por tanto por qué Γ no encierra al origen $w = 0$

b) Tras observar que

$$\Delta_C \arg[f(z) + g(z)] = \Delta_C \arg \left\{ f(z) \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right] \right\} =$$

$$= \Delta_C \arg f(z) + \Delta_C \arg \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right],$$

usar el resultado de la parte *a)* para concluir que

$$\Delta_C \arg[f(z) + g(z)] = \Delta_C \arg f(z).$$

Usar ahora el principio del argumento (Sec. 105) para completar la demostración del teorema de Rouché.

106. UNA SUPERFICIE DE RIEMANN PARA log z

Una *superficie de Riemann* es una generalización del plano complejo a una superficie de más de una hoja tal que una función multivaluada tiene sólo un valor correspondiente a cada punto de esa superficie. Una vez construida esa superficie para una función dada, la función es univaluada sobre la superficie y se le puede aplicar allí la teoría de funciones univaluadas. Las complicaciones que aparecen ligadas al carácter multivaluado de la función quedan así evitadas por un truco geométrico. Sin embargo, la descripción de esas superficies y la relación entre sus hojas pueden ser muy engorrosas. Limitaremos nuestra discusión a ejemplos muy simples, comenzando con una superficie para log z.

Correspondiendo a cada número no nulo z, la función multivaluada

$$\log z = \ln r + i\theta$$

tiene infinitos valores. Para describir log z como función univaluada, sustituimos el plano z, quitado el origen, por una superficie sobre la cual se coloca un nuevo punto cada vez que el argumento de z crece o decrece en 2π o en un múltiplo entero de 2π.

Consideremos el plano z, sin el origen, como una fina hoja R_0 cortada a lo largo del eje real positivo. Sobre esa hoja, θ varía de 0 a 2π. Sea R_1 otra hoja cortada del mismo modo y colocada sobre R_0. El borde inferior del corte en R_0 se une entonces con el borde superior del corte de R_1. Sobre R_1, θ varía de 2π a 4π; así que cuando z es representado por un punto en R_1 la componente imaginaria de log z varía de 2π a 4π.

Se corta ahora de la misma manera otra hoja R_2 y se coloca sobre R_1. El borde inferior del corte de R_1 se une con el superior del corte R_2, y análogamente para las hojas R_3, R_4, ... Una hoja R_{-1} en la que θ varía desde 0 hasta -2π se corta y se coloca bajo R_0, con el borde inferior de su corte unido al borde superior del corte de R_0. Las hojas R_{-2}, R_{-3},... se construyen de forma similar. Las coordenadas r y θ de un punto sobre cualquiera de las hojas pueden

considerarse como coordenadas polares de la proyección del punto sobre el plano z original, estando restringida la variación de θ en cada hoja a un rango de 2π radianes.

Consideremos cualquier curva continua sobre esta superficie conexa de infinitas hojas. Al describir un punto z esa curva, los valores de $\log z$ varían continuamente ya que θ, al igual que r, varía continuamente; y $\log z$ toma exactamente un valor correspondiente a cada punto de la curva. Por ejemplo, si el punto da una vuelta completa en torno al origen sobre la hoja R_0 por el camino indicado en la Figura 136, el ángulo cambia de 0 a 2π. Al atravesar el rayo $\theta = 2\pi$, el punto pasa a la hoja R_1 de la superficie. Mientras completa una vuelta en R_1, el ángulo θ varía de 2π a 4π, y al cruzar el rayo $\theta = 4\pi$, el punto pasa a la hoja R_2.

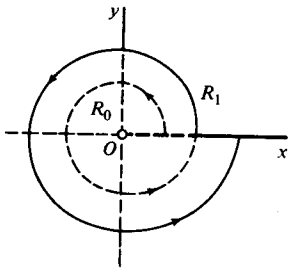


Figura 136

La superficie aquí descrita es una superficie de Riemann para $\log z$. Es una superficie conexa de infinitas hojas, construida de modo tal que $\log z$ es univaluada sobre ella.

La transformación $w = \log z$ aplica la superficie de Riemann completa de manera uno a uno sobre todo el plano w. La imagen de la hoja R_0 es la franja $0 \leqq v \leqq 2\pi$. Cuando un punto z se mueve por la hoja R_1 a lo largo del arco que muestra la Figura 137, su imagen w se mueve hacia arriba cruzando la recta $v = 2\pi$, como indica esa figura.

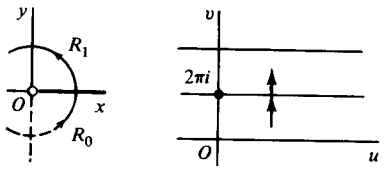


Figura 137

Nótese que $\log z$, definida sobre la hoja R_1, representa la prolongación analítica de la función analítica univaluada

$$f(z) = \ln r + i\theta \qquad (0 < \theta < 2\pi)$$

por el eje real positivo hacia arriba. En ese sentido, $\log z$ es no sólo una función univaluada de todos los puntos de la superficie de Riemann, sino también una función *analítica* en ellos.

Las hojas podrían haberse cortado, claro está, a lo largo del eje real negativo o de cualquier otro rayo que parta del origen, y unidas adecuadamente por los bordes de sus cortes formarían otra superficie de Riemann para $\log z$.

107. UNA SUPERFICIE PARA $z^{1/2}$

En cada punto del plano z, la función

$$z^{1/2} = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}$$

tiene dos valores. Una superficie de Riemann para $z^{1/2}$ se obtiene sustituyendo el plano z por una superficie de dos hojas R_0 y R_1, cortadas ambas a lo largo del eje real positivo y con R_1 situada sobre R_0. El borde inferior del corte de R_0 se une con el superior de R_1, y el inferior de R_1 con el superior de R_0.

Si un punto z parte del borde superior del corte de R_0 y describe un circuito continuo en torno del origen en sentido positivo (Fig. 138), el ángulo θ crece de 0 a 2π. El punto pasa entonces de la hoja R_0 a la hoja R_1, donde θ crece de 2π a 4π. Al seguir moviéndose el punto, regresa a la hoja R_0, donde los valores de θ varían de 4π a 6π, o desde 0 a 2π, una elección que no afecta al valor de $z^{1/2}$, etc. Obsérvese que el valor de $z^{1/2}$ en un punto en el que el circuito pasa de la hoja R_0 a la hoja R_1 es diferente del valor de $z^{1/2}$ en un punto en el que el circuito pasa de la hoja R_1 a la hoja R_0.

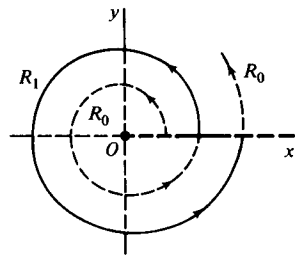


Figura 138

Hemos construido así una superficie de Riemann sobre la cual $z^{1/2}$ es una función univaluada para todo z no nulo. En esa construcción, los bordes de las hojas R_0 y R_1 se han unido por pares de modo tal que la superficie obtenida es conexa y cerrada.

Los puntos en que se unen dos bordes son distintos de los puntos en que se unen los otros dos bordes. Así pues, es físicamente imposible realizar un modelo de esa superficie de Riemann. Al visualizar una superficie de Riemann es importante comprender cómo hay que proceder al llegar al borde de un corte.

El origen es un punto especial sobre esa superficie de Riemann. Es común a ambas hojas, y una curva en torno del origen sobre la superficie ha de dar dos vueltas a su alrededor si ha de ser una curva cerrada. Un punto de esta clase sobre una superficie de Riemann se llama un *punto de ramificación*.

La imagen de la hoja R_0 bajo la transformación $w = z^{1/2}$ es la mitad superior del plano w, ya que el argumento de w es $\theta/2$ sobre R_0, donde $0 \leqq \theta/2 \leqq \pi$. Análogamente, la imagen de la hoja R_1 es el semiplano w inferior. Tal como está definida sobre cada hoja, la función es la prolongación analítica a través del corte de la función definida sobre la otra hoja. La función univaluada $z^{1/2}$ de los puntos de la superficie de Riemann es analítica en todos los puntos, excepto en el origen.

108. SUPERFICIES PARA FUNCIONES RELACIONADAS

Ejemplo 1. Vamos a describir una superficie de Riemann para la función bivaluada

$$f(z) = (z^2 - 1)^{1/2} = \sqrt{r_1 r_2}\, \exp \frac{i(\theta_1 + \theta_2)}{2} \qquad [1]$$

donde $z - 1 = r_1 \exp(i\theta_1)$ y $z + 1 = r_2 \exp(i\theta_2)$. Una rama de esa función, con el segmento recto P_1P_2 entre los puntos de ramificación $z = \pm 1$ como corte de ramificación (Fig. 139), se describió en el Ejemplo 2, Sección 72. Esa rama es tal como se ha escrito arriba, con las restricciones $r_k > 0$, $0 \leqq \theta_k < 2\pi$ $(k = 1, 2)$ y $r_1 + r_2 > 2$. La rama no está definida sobre el segmento P_1P_2.

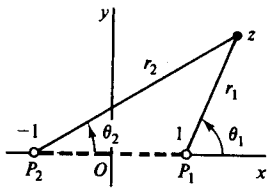


Figura 139

Una superficie de Riemann para la función bivaluada [1] debe consistir en dos hojas R_0 y R_1. Cortamos ambas por el segmento P_1P_2. El borde inferior del corte en R_0 se une entonces con el borde superior de corte en R_1, y el inferior de R_1 con el superior de R_0.

Sobre la hoja R_0 hacemos variar a los ángulos θ_1 y θ_2 desde 0 hasta 2π. Si un punto de R_0 describe una curva cerrada simple que encierra al segmento P_1P_2 una vez en dirección contraria a la de las agujas de un reloj, tanto θ_1 como θ_2 cambian en 2π al regresar el punto a su posición original. El cambio en $(\theta_1 + \theta_2)/2$ es también 2π, y el valor de f queda inalterado. Si un punto que parte de R_0 describe un camino que pasa dos veces en torno del punto $z = 1$, cruza de R_0 a R_1 y después regresa a R_0 antes de volver a su posición original.

En este caso, el valor de θ_1 cambia en 4π, mientras que el de θ_2 no sufre cambio ninguno. Análogamente, para un circuito que gire dos veces en torno al punto $z = -1$, el valor de θ_2 cambia en 4π, mientras el de θ_1 no cambia. De nuevo, el cambio en $(\theta_1 + \theta_2)/2$ es 2π, y el valor de f queda inalterado. Así pues, sobre la hoja R_0 el recorrido de los ángulos θ_0 y θ_2 puede ser extendido cambiando ambos θ_1 y θ_2 por un mismo múltiplo entero de 2π o cambiando sólo uno de los ángulos en un múltiplo entero de 4π. En cualquier caso, el cambio total en ambos ángulos es un múltiplo entero par de 2π.

Para obtener el rango de valores para θ_1 y θ_2 sobre la hoja R_1, hagamos notar que si un punto parte de R_0 y describe un camino en torno de uno sólo de los puntos de ramificación una vez, cruza a la hoja R_1 y no vuelve a R_0. En este caso, el valor de uno de los ángulos cambia en 2π mientras el otro no sufre cambio. Por tanto, sobre la hoja R_1 un ángulo puede variar entre 2π y 4π, mientras el otro lo hace entre 0 y 2π. Su suma varía entonces entre 2π y 4π y el valor de $(\theta_1 + \theta_2)/2$, que es el argumento de $f(z)$, varía entre π y 2π. Nuevamente, el rango de los ángulos se extiende cambiando el valor de uno de ellos por un múltiplo entero de 4π o cambiando el valor de ambos por un mismo múltiplo entero de 2π.

La función bivaluada [1] puede considerarse ahora como una función univaluada de los puntos de la superficie de Riemann que acabamos de construir. La transformación $w = f(z)$ aplica cada una de las hojas sobre el plano w completo.

Ejemplo 2. Sea la función bivaluada

$$f(z) = [z(z^2 - 1)]^{1/2} = \sqrt{r r_1 r_2}\, \exp \frac{i(\theta + \theta_1 + \theta_2)}{2} \qquad [2]$$

(Fig. 140). Los puntos $z = 0, \pm 1$ son puntos de ramificación de esa función. Nótese que si el punto z describe un circuito que encierra a esos tres puntos, el argumento de $f(z)$ cambia en 3π y, en consecuencia, el valor de la función cambia. En consecuencia, un corte de ramificación ha de ir desde uno de los puntos de ramificación hasta el infinito si queremos describir una rama univaluada de f. Por tanto el punto del infinito es también un punto de ramificación, como puede verse sin más que observar que la función $f(1/z)$ tiene un punto de ramificación en $z = 0$.

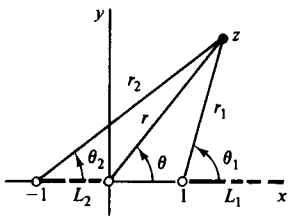


Figura 140

Cortemos dos hojas a lo largo del segmento recto L_2 de $z = -1$ a $z = 0$ y a lo largo de la parte L_1 del eje real que está a la derecha del punto $z = 1$. Especificamos que cada uno de los ángulos θ, θ_1 y θ_2 deben variar entre 0 y 2π sobre la hoja R_0, y entre 2π y 4π sobre la hoja R_1. Especificamos asimismo que los ángulos correspondientes a un punto sobre cualquier hajo pueden ser cambiados por múltiplos enteros de 2π de forma tal que la suma de los tres ángulos cambie en un múltiplo entero de 4π. El valor de f, por tanto, queda invariable.

Una superficie de Riemann para la función bivaluada [2] se obtiene uniendo los bordes inferiores en R_0 de los cortes L_1 y L_2 con los superiores en R_1 de los cortes L_1 y L_2, respectivamente. Los bordes inferiores en R_1 de los cortes L_1 y L_2 se unen entonces con los bordes superiores en R_0 de los cortes en L_1 y L_2, respectivamente. Se comprueba sin dificultad con ayuda de la Figura 140 que una rama de la función viene representada por sus valores en los puntos de R_0 y la otra rama en los puntos de R_1.

EJERCICIOS

1. Describir una superficie de Riemann para la función trivaluada $w = (z - 1)^{1/3}$, y determinar qué tercio del plano w representa la imagen de cada rama de esa superficie.

2. Describir la superficie de Riemann para $\log z$ obtenida al cortar el plano z a lo largo del eje real negativo. Compararla con la superficie de Riemann obtenida en la Sección 106.

3. Hallar la imagen bajo la transformación $w = \log z$ de la hoja R_n, donde n es un entero arbitrario, de la superficie de Riemann para $\log z$ dada en la Sección 106.

4. Comprobar que, bajo la transformación $w = z^{1/2}$ la hoja R_1 de la superficie de Riemann para $z^{1/2}$ dada en la Sección 107 se aplica sobre el semiplano w inferior.

5. Describir sobre una superficie de Riemann para $z^{1/2}$ la curva cuya imagen es el círculo $|w| = 1$ bajo la transformación $w = z^{1/2}$.

6. A cada punto sobre la superficie de Riemann descrita en el Ejemplo 2, Sección 108, para la función $w = f(z)$ de ese ejemplo, le corresponde exactamente un valor de w. Probar que para cada valor de w existen, en general, tres puntos sobre la superficie.

7. Describir una superficie de Riemann para la función multivaluada

$$f(z) = \left(\frac{z - 1}{z}\right)^{1/2}.$$

8. Sea C el círculo $|z - 2| = 1$, orientado positivamente, sobre la superficie de Riemann descrita en la Sección 107 para $z^{1/2}$, donde la mitad superior de ese círculo está en la hoja R_0 y la inferior en R_1. Nótese que para todo punto z de C podemos escribir

$$z^{1/2} = \sqrt{r}\, e^{i\theta/2}$$

donde

$$4\pi - \frac{\pi}{2} < \theta < 4\pi + \frac{\pi}{2}.$$

Explicar por qué se deduce que

$$\int_C z^{1/2}\, dz = 0.$$

Generalizar este resultado para englobar el caso de otras curvas cerradas simples que cruzan de una hoja a otra sin encerrar los puntos de ramificación. Generalizar a otras funciones, extendiendo así el teorema de Cauchy-Goursat a integrales de funciones multivaluadas.

9. Hagamos notar que la superficie de Riemann descrita para $(z^2 - 1)^{1/2}$ en el Ejemplo 1, Sección 108, es también una superficie de Riemann para la función

$$g(z) = z + (z^2 - 1)^{1/2}.$$

Denotemos por f_0 la rama de $(z^2 - 1)^{1/2}$ definida sobre la hoja R_0. Probar que las ramas g_0 y g_1 de g sobre las dos hojas vienen dadas por las ecuaciones

$$g_0(z) = \frac{1}{g_1(z)} = z + f_0(z).$$

10. En el Ejercicio 9, la rama f_0 de $(z^2 - 1)^{1/2}$ puede ser descrita por la ecuación

$$f_0(z) = \sqrt{r_1 r_2}\left(\exp\frac{i\theta_1}{2}\right)\left(\exp\frac{i\theta_2}{2}\right),$$

donde θ_1 y θ_2 varían entre 0 y 2π, y

$$z - 1 = r_1 \exp(i\theta_1), \qquad z + 1 = r_2 \exp(i\theta_2).$$

Nótese que $2z = r_1 \exp(i\theta_1) + r_2 \exp(i\theta_2)$, y demuéstrese que la rama g_0 de la función $g(z) = z + (z^2 - 1)^{1/2}$ se puede escribir como

$$g_0(z) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{r_1}\exp\frac{i\theta_1}{2} + \sqrt{r_2}\exp\frac{i\theta_2}{2}\right)^2.$$

Hallar $g_0(z)\overline{g_0(z)}$, y observar que $r_1 + r_2 \geqq 2$ y $\cos[(\theta_1 - \theta_2)/2] \geqq 0$ para todo z, con objeto de demostrar que $|g_0(z)| \geqq 1$. Probar entonces que la transformación $w = z + (z^2 - 1)^{1/2}$ aplica la hoa R_0 de la superficie de Riemann sobre la región $|w| \geqq 1$, la hoja R_1 sobre la región $|w| \leqq 1$, y el corte de ramificación entre los puntos $z = \pm 1$ sobre el círculo $|w| = 1$. Nótese que la transformación usada aquí es inversa de la transformación

$$z = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right),$$

y compárese el resultado obtenido con el del Ejercicio 7, Sección 10.

APENDICE
UNO

BIBLIOGRAFÍA

La siguiente lista de libros suplementarios dista mucho de ser exhaustiva. Pueden verse más referencias en los aquí citados.

Teoría

Ahlfors, L. V.: *Complex Analysis*, 3.ª ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., Nueva York, 1979.

Bieberbach, L.: *Conformal Mapping*, Chelsea Publishing Co., Nueva York, 1986.

Boas, R. P.: *Invitation to Complex Analysis*, Random House, Inc., Nueva York, 1987.

Carathéodory, C.: *Conformal Representation*, Cambridge University Press, Londres, 1952.

——: *Theory of Functions of a Complex Variable*, Vols. 1 y 2, Chelsea Publixhing Co., Nueva York, 1954.

Copson, E. T.: *Theory of Functions of a Complex Variable*, Oxford University Press, Londres, 1962.

Evans, G. C.: *The Logarithmic Potential*, 3 vols. en uno, 2.ª ed., Chelsea Publishing Co., Nueva York, 1927 (reimpresión).

Flanigan, F. J.: *Complex Variables: Harmonic and Analytic Functions*, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1983.

Fisher, S. D.: *Complex Variables:* Wadsworth, Inc., Belmont, CA, 1986.

Grove, E. A., y G. Ladas: *Introduction to Complex Variables*, Houghton Mifflin Company, Boston, 1974.

Hille, E.: *Analytic Funcion Theory*, Vols. 1 y 2, 2.ª ed., Chelsea Publishing Co., Nueva York, 1973.

Kaplan, W.: *Advanced Calculus*, 3.ª ed., Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, MA, 1984.

——: *Advanced Mathematics for Engineers*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, MA, 1981.

Kellog, O. D.: *Foundations of Potential Theory*, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1953.

Knopp, K.: *Elements of the Theory of Functions*, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1952.

Krzyz, J. G.: *Problems in Complex Variable Theory*, American Elsevier Publishing Company, Inc., Nueva York, 1971.

Levinson, N., y R. M. Redheffer: *Complex Variables*, Holden-Day, Inc., San Francisco, 1970.

Markushevich, A. I.: *Theory of Functions of a Complex Variable*, 3 vols. en uno, 2.ª ed., Chelsea Publishing Co., Nueva York, 1977.

Marsden, J. E., y M. J. Hoffman: *Basic Complex Analysis*, 2.ª ed., W. H. Freeman and Company, Nueva York, 1987.

Mathews, J. H.: *Complex Variables for Mathematics and Engineering*, 2.ª ed., Wm. C. Brown Publishers, Dubuque, IA, 1988.

Mitrinović, D. S.: *Calculus of Residues*, P. Noordhoff, Ltd., Groningen, 1966.

Nehari, Z.: *Conformal Mapping*, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1975.

Newman, M. H. A.: *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*, Cambridge University Press, Londres, 1964.

Pennisi, L. L.: *Elements of Complex Variables*, Holt, Rinehart y Winston, Inc., Nueva York, 1963.

Rubenfeld, L. A.: *A first Course in Applied Complex Variables*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1985.

Saff, E. B., y A. D. Snider: *Fundamentals of Complex Analysis for Mathematics, Science, and Engineering*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1976.

Silverman, R. A.: *Complex Analysis with Applications*, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1984.

Springer, G.: *Introduction to Riemann Surfaces*, 2.ª ed., Chelsea Publishing Co., Nueva York, 1981.

Taylor, A. E., y W. R. Mann: *Advanced Calculus*, 3.ª ed., John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1983.

Thron, W. J.: *Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable*, John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1953.

Titchmarsh, E. C.: *Theory of Functions*, Oxford University Press, 2.ª ed., Londres, 1939.

Whittaker, E., y G. N. Watson: *A course of Modern Analysis*, 4.ª ed., Cambridge University Press, Londres, 1963.

Aplicaciones

Bowman, F.: *Introduction to Elliptic Functions, with Applications*, English Universities Press, Londres, 1953.

Brown, G. H.; C. N. Hoyler, y R. A. Bierwirth: *Theory and Application of Radio-Frequency Heating*, D. Van Nostrand Company, Inc., Nueva York, 1947.

Churchill, R. V.: *Operational Mathematics*, 3.ª ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1972.

——, y J. W. Brown: *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 4.ª ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1987.

Hayt, W. H., Jr.: *Engineering Electromagnetics*, 4.ª ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1981.

Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis*, Vols. 1, 2 y 3., John Wiley & Sons, Inc., Nueva York, 1974, 1977, 1986.

Kober, H.: *Dictionary of Conformal Representations*, Dover Publications, Inc., Nueva York, 1952.

Lamb, H.: *Hydrodynamics*, 6.ª ed., Dover Publications, Inc., Nueva York, 1945.

Lebedev, N. N.: *Special Functions and Their Applications*, rev. ed., Dover Publications, Inc., Nueva York, 1972.

Milne-Thomson, L. M.: Theoretical Hydrodynamics, Macmillan & Co., Ltd, Londres, 1955.

Oberhettinger, F., y W. Magnus: *Anwendung der elliptischen Funktionen in Physik und Technik*, Springer-Verlag OHG, Berlín, 1949.

Rothe, R.; F. Ollendorf, y K. Pohlhausen: *Theory of Functions as Applied to Engineering Problems*, Technology Press, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, 1948.

Sokolnikoff, I. S.: *Mathematical Theory of Elasticity*, 2.ª ed., Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, FL, 1983.

Streeter, V. L., y E. B. Wylie: *Fluid Mechanics*, 7.ª ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1979.

Timoshenko, S. P., y J. N. Goodier: *Theory of Elasticity*, 3.ª ed., McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1970.

APENDICE

DOS

TABLA DE TRANSFORMACIONES DE REGIONES (véase Cap. 7)

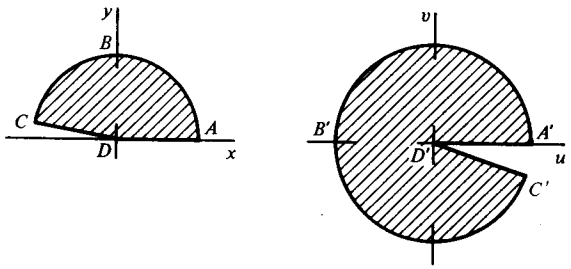


Figura 1. $w = z^2$.

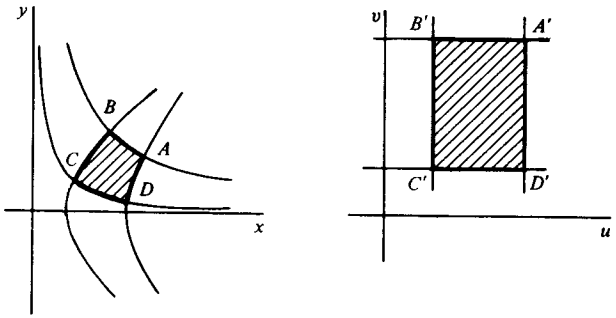


Figura 2. $w = z^2$.

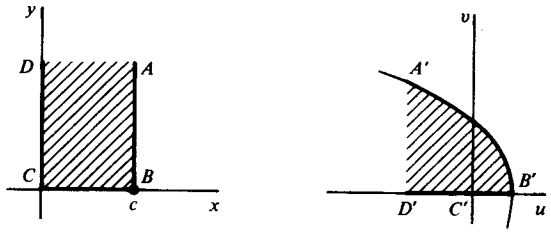


Figura 3. $w = z^2$; $A'B'$ sobre la parábola $v^2 = -4c^2(u - c^2)$.

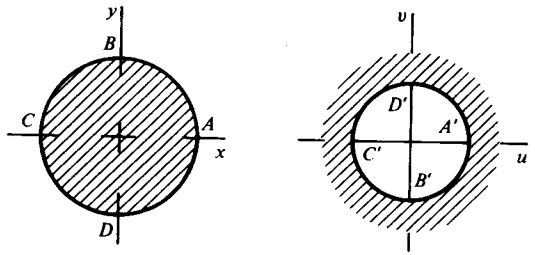


Figura 4. $w = \dfrac{1}{z}$.

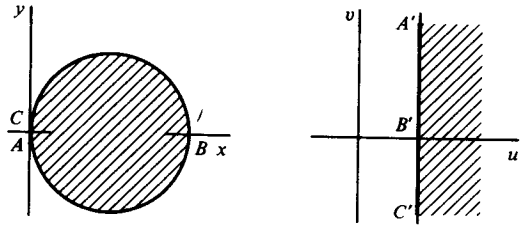


Figura 5. $w = \dfrac{1}{z}$.

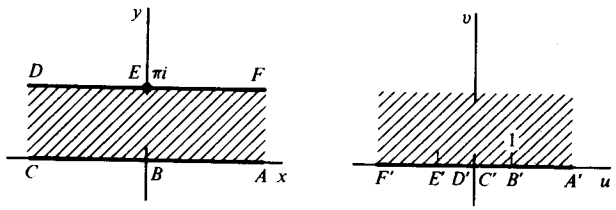


Figura 6. $w = \exp z$.

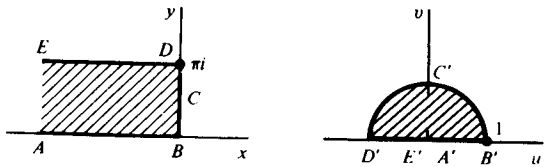


Figura 7. $w = \exp z$.

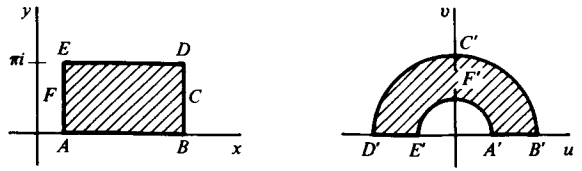


Figura 8. $w = \exp z$.

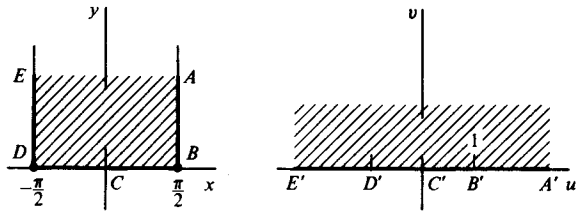


Figura 9. $w = \text{sen } z$.

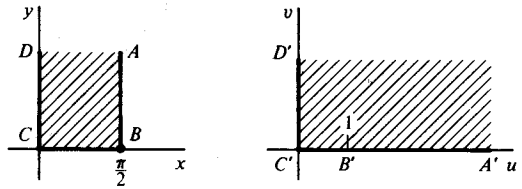


Figura 10. $w = \text{sen } z$.

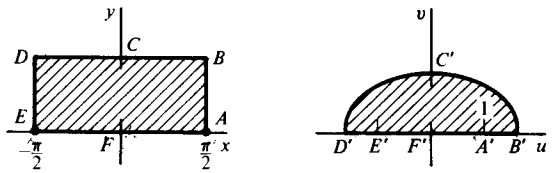


Figura 11. $w = \text{sen } z$; BCD sobre la recta $y = b (b > 0)$, $B'C'D'$ sobre la elipse $\dfrac{u^2}{\cosh^2 b} + \dfrac{v^2}{\text{senh}^2 b} = 1$.

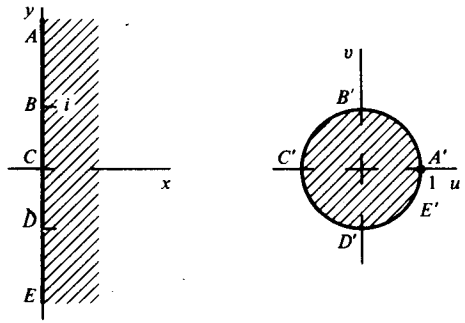


Figura 12. $w = \dfrac{z - 1}{z + 1}$.

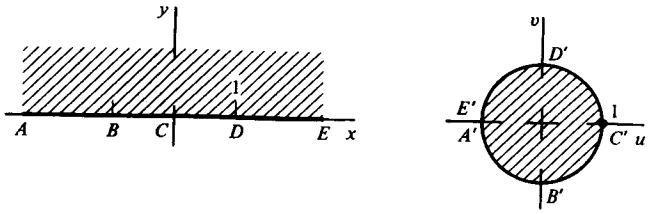


Figura 13. $w = \dfrac{i - z}{i + z}$.

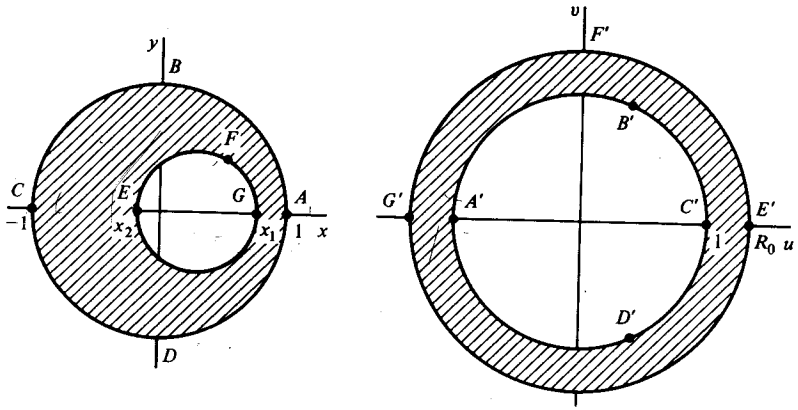


Figura 14. $w = \dfrac{z - a}{az - 1}$; $a = \dfrac{1 + x_1x_2 + \sqrt{(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)}}{x_1 - x_2}$,

$R_0 = \dfrac{1 - x_1x_2 + \sqrt{(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)}}{x_1 - x_2}$ ($a > 1$ y $R_0 > 1$ cuando $-1 < x_2 < x_1 < 1$).

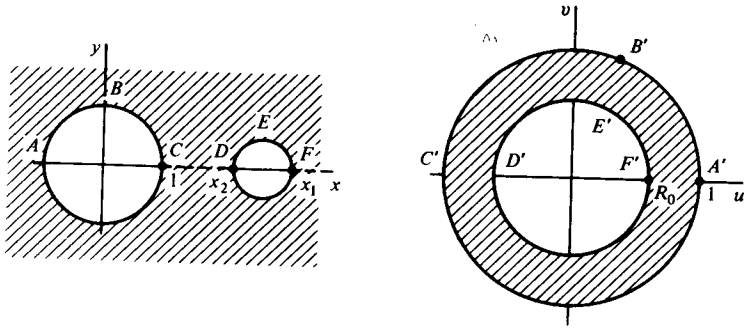


Figura 15. $w = \dfrac{z - a}{az - 1}$; $a = \dfrac{1 + x_1x_2 + \sqrt{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)}}{x_1 + x_2}$,

$R_0 = \dfrac{x_1x_2 - 1 - \sqrt{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)}}{x_1 - x_2}$ ($x_2 < a < x_1$, y $0 < R_0 < 1$ cuando $1 < x_2 < x_1$).

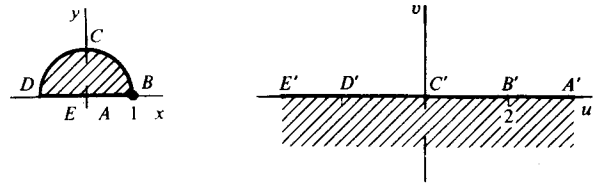


Figura 16. $w = z + \dfrac{1}{z}$.

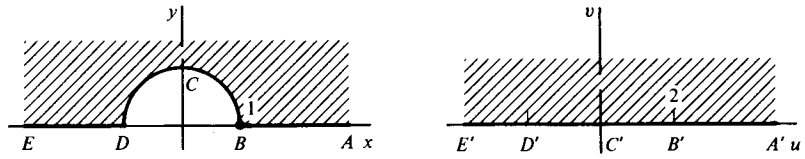


Figura 17. $w = z + \dfrac{1}{z}$.

Figura 18. $w = z + \dfrac{1}{z}$; $B'C'D'$ sobre la elipse $\dfrac{u^2}{(b + 1/b)^2} + \dfrac{v^2}{(b - 1/b)^2} = 1$.

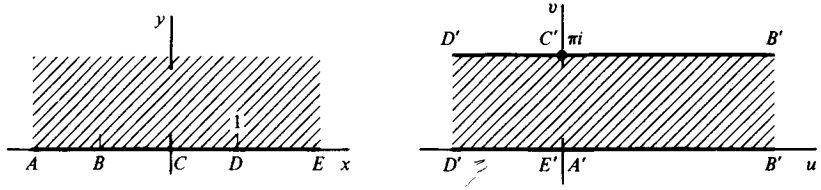


Figura 19. $w = \text{Log}\,\dfrac{z - 1}{z + 1}$; $z = -\coth\dfrac{w}{2}$.

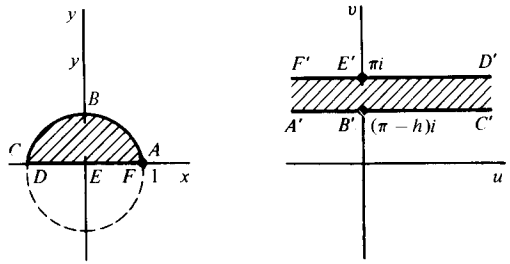


Figura 20. $w = \text{Log}\,\dfrac{z - 1}{z + 1}$; ABC sobre el círculo $x^2 + (y + \cot h)^2 = \csc^2 h$ ($0 < h < \pi$).

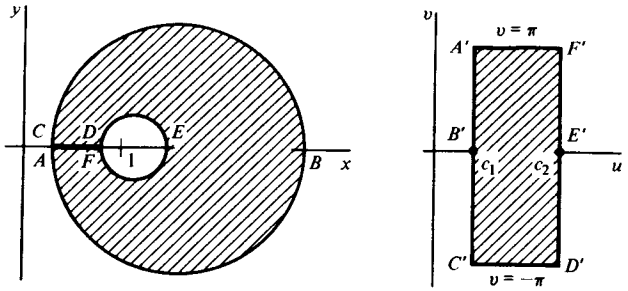


Figura 21. $w = \operatorname{Log}\dfrac{z+1}{z-1}$; centros de los círculos en $z = \coth c_n$, radios cshc c_n $(n = 1, 2)$.

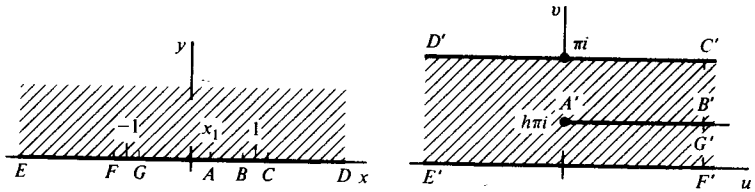


Figura 22. $w = h \ln \dfrac{h}{1-h} + \ln 2(1-h) + i\pi - h \operatorname{Log}(z+1) - (1-h)\operatorname{Log}(z-1)$; $x_1 = 2h - 1$.

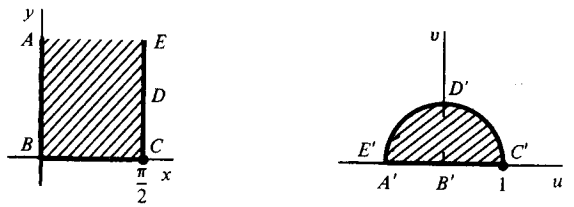


Figura 23. $w = \left(\operatorname{tg}\dfrac{z}{2}\right)^2 = \dfrac{1-\cos z}{1+\cos z}$.

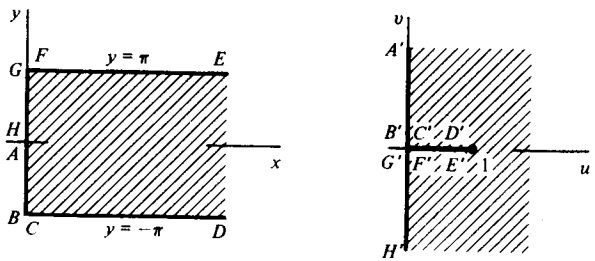


Figura 24. $w = \coth\dfrac{z}{2} = \dfrac{e^z+1}{e^z-1}$.

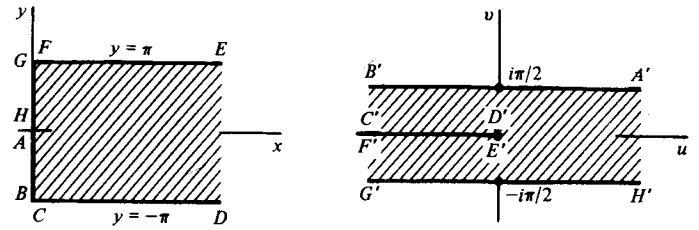


Figura 25. $w = \operatorname{Log}\left(\coth\dfrac{z}{2}\right)$.

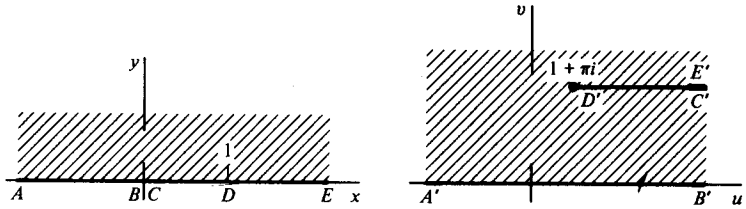


Figura 26. $w = \pi i + z - \operatorname{Log} z$.

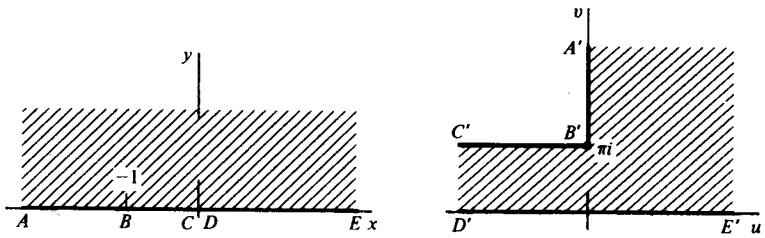


Figura 27. $w = 2(z+1)^{1/2} + \operatorname{Log}\dfrac{(z+1)^{1/2}-1}{(z+1)^{1/2}+1}$.

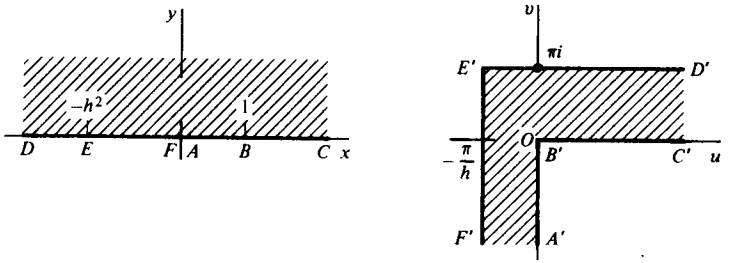


Figura 28. $w = \dfrac{i}{h}\operatorname{Log}\dfrac{1+iht}{1-iht} + \operatorname{Log}\dfrac{1+t}{1-t}$; $t = \left(\dfrac{z-1}{z+h^2}\right)^{1/2}$.

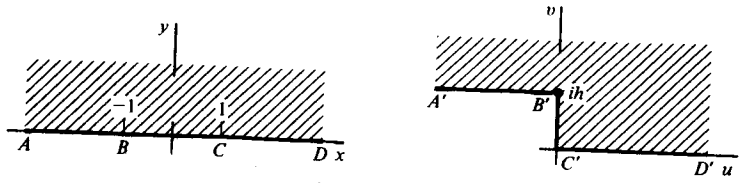


Figura 29. $w = \dfrac{h}{\pi}[(z^2 - 1)^{1/2} + \cosh^{-1} z]$*.

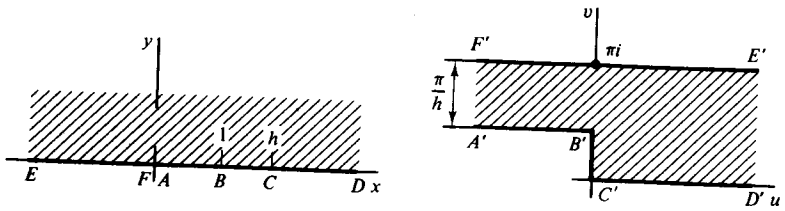


Figura 30. $w = \cosh^{-1}\left(\dfrac{2z - h - 1}{h - 1}\right) - \dfrac{1}{h}\cosh^{-1}\left[\dfrac{(h + 1)z - 2h}{(h - 1)z}\right]$.

* Véase Ejercicio 3, Sección 93.

INDICE

A trozos, función continua, 99, 106-107
Abierto, conjunto, 27-28
Absoluta, convergencia, 154, 173-174
Absoluto, valor, 8
Acotada, función, 48, 373
Acotado, conjunto, 28
Acumulación, punto de, 28
Aerodinámica, 307
Aislada, singularidad, 190
Aislados, ceros, 205
Analítica, prolongación, 366-369
Analíticas, funciones, 64-66
  derivadas de, 138-141
  cociente de, 64, 203-204
  ceros de, 202-203, 205, 230-231, 378
Angulo de inclinación, 103, 270-271
Angulo de rotación, 271
Antiderivada (primitiva), 99, 116-122
Aplicación, 32, 235-266
  conforme (*Véase* Conforme, aplicación)
  del eje real sobre un polígono, 319-321
  isogonal, 272
  muchos a uno, 74
  por función logarítmica, 251-256
  por funciones exponenciales, 74-75, 250-251
  por funciones trigonométricas, 252-256
  uno a uno (biyectiva), 33-36, 237, 243, 253, 254, 258-259, 265-266
  (*Véase también* Transformación)
Arco, 101
  diferenciable, 102-103
  simple, 101, 104
  suave, 103-104
Argumento, 14
Argumento, principio del, 374-377
Armónicas, funciones, 66-69
  conjugadas, 67, 278-280
  en un cuadrante, 360-363
  en una región semicircular, 350-351, 363
  máximos y mínimos, 147, 149-150, 301
  transformación de, 280-282

Bernoulli, ecuación de, 308
Bessel, función de, 172*n*.
Beta, función, 226, 325
Bibliografía, 386-388
Bidimensional, flujo de un fluido, 307-309
Bilineal, transformación, 242
Binomio, fórmula del, 7
Boas, R. P. Jr., 149*n*.
Bolzano-Weierstrass, teorema de, 234
Bromwich, integral de, 228

Campo, intensidad del, 301
Cauchy, A. L., 56
Cauchy, desigualdad de, 148
Cauchy, fórmula integral de, 136-138
  para el semiplano, 355
Cauchy-Goursat, teorema de, 122-124
  demostración, 126-129
  extensiones del, 129-131
  recíproco del, 142
Cauchy, producto de, 184
Cauchy-Riemann, ecuaciones de, 55-57
  en forma compleja, 64
  en forma polar, 60
  suficiencia de las, 58-60

Cauchy, valor principal de, 208
Ceros de funciones, 79, 148
aislados, 205
número de, 231, 378
orden de los, 202-203
Cerrada simple, curva, 101
Cerrado, conjunto, 27
Cerrado, contorno, 116, 129
simple, 104, 124, 131-132
Cierre de un conjunto, 27
Circulación de un fluido, 307
Círculo de convergencia, 173-174
Compleja, forma, de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, 64
Compleja, funciones de una variable, 30-32
Complejo conjugado, 9
Complejo, plano, 7
extendido, 44, 238, 243
regiones del, 27-28
Complejo, potencial, 310
Complejos, exponentes, 91-93
Complejos, números, 1
argumento, 14-15
conjugado, 9
forma exponencial, 17-19
forma polar, 14-17
módulo, 8
parte imaginaria, 1
parte real, 1
potencias, 19-20, 91-93
propiedades algebraicas, 2-5
raíces, 20-23, 88-89
Composición de funciones, 46, 53, 65
Conductividad térmica, 289
Conexo, conjunto abierto, 28
Conforme, aplicación, 270-285
aplicaciones, 289-315
propiedades, 270-276
Conforme, transformación, 270-276
ángulo de rotación, 271
factor de escala, 273
inversa local, 274
Conjugado
armónico, 67, 278-280
complejo, 9-10
Continua, función, 46-48
Continuidad, 46-48
uniforme, 48
Contorno, 101-104
cerrado simple, 104, 122, 124, 130-132
Contorno, condiciones de, 280-285
transformaciones de, 283-285
Contorno, integrales de, 106-109
Contorno problema de valores de, 280-281, 344
Contracción, 235, 273
Convergencia de series, 154
absoluta, 154, 173
círculo de, 174
uniforme, 174-175
Convergencia de sucesiones, 151-152
Coordenadas
polares, 14, 60-61, 260
rectangulares, 7, 56, 251
Corte (ramificación), 86, 260-267
integración a través de un, 220-222
Crítico, punto, 272
Cuadrática, fórmula, 26
Curva
cerrada simple, 101
de Jordan, 101
de nivel, 71

Christoffel, E. B., 323

Definidos, integrales, 97-101, 105, 218-219
Deformación de caminos, principio de, 132
De Moivre, fórmula de, 20,
Derivadas, 49-51
existencia de la, 57, 60-61
Derivación, fórmulas de, 52-54
Desigualdad
Cauchy, 148
Jordan, 213
triangular, 10-12
Diferenciable, arco, 102
Diferenciable, función, 49
Difusión, 291
Dilatación, 235, 273
Dirichlet, problema de, 280
en la región exterior a un círculo, 351-352
en un cuadrante, 361-362
en un disco, 346-347
en un rectángulo, 306
en un semiplano, 291, 356-358, 362
en una banda infinita, 294-295, 300
en una región semicircular, 350-351

División de series de potencias, 183-186
Dominio(s), 28
de definición de una función, 30
intersección de, 366
múltiplemente conexos, 129-132
simplemente conexos, 129-132
unión, de, 366

Electrostático, potencial, 301-302
entre placas, 318, 339
en un cilindro, 302-304
en un semiplano, 302-304
Elementos de función, 367
Elíptica, integral, 325
Encajados, cuadrados, 125, 135
Encajados, intervalos, 134
Entera, función, 64, 148
Entorno, 27
del infinito, 45
punteado, 27
Equipotenciales, 302, 309
Escala, factor de, 273
Esencial, singularidad, 197
comportamiento cerca de una, 197, 374
residuo de una, 199
Estereográfica, proyección, 44
Euler, fórmula de, 17, 73
Euler, números de, 189
Evitable, singularidad, 197, 373
Exponencial, forma, de los números complejos, 17-19
Exponencial, función, 72-74, 75, 92
aplicación por la, 74-75, 250-252
inversa de la, 75, 84-85, 275-276
Extendido, plano complejo, 44, 238, 243
Exterior, punto, 27

Fijo, punto, 248
Fluido
circulación, 307
presión, 308-309
rotación, 308
velocidad, 307
Fluido, flujo de un, 307-309, 333-336
alrededor de un cilindro, 314-315
circulación, 307
en torno a un ala, 317-318
en torno a una placa, 317
en un cuadrante, 313
en un canal, 336-339
en una banda semiinfinita, 316
en una región angular, 315
irrotacional, 308
junto a una esquina, 312-315
potencial complejo, 310
sobre un escalón, 343
Flujo de calor, 289
Flujo, función de, 309-312
Flujo, líneas de, 302
Flujo irrotacional, 308
Fórmula
cuadrática, 26
del binomio, 7
de De Moivre, 20
de Euler, 17, 73
(*Véase también* Fórmulas específicas)
Fourier, integral de, 225
Fourier, series de, 172*n*., 173
Fresnel, integrales de, 224
Frontera, punto, 27
Función(es), 30
acotada, 48, 373
analítica (*Véase* Analítica, función)
armónica (*Véase* Armónica, función)
Bessel, 172*n*.
beta, 226, 325
ceros de una, 79, 148, 202-204, 205, 230, 378-379
composición, 46-47, 53, 65
continua, 46
continua a trozos, 99, 106-107
de flujo, 310, 311-312
de Green, 361, 364
derivada, 138-141
diferenciable, 49
dominio de definición, 30
elementos de, 367
entera, 64, 148
exponencial (*Véase* Exponencial, función)
gamma, 220
hiperbólica (*Véase* Hiperbólica, función)
holomorfa, 64*n*.
impar, 105
impulso, 352-353
inversa, 274-275
límite de una, 38-41
relativo al punto del infinito, 44-46
lineal, 235-237

multivaluada, 32, 379
par, 105
parte principal, 196-197
primitiva, 99, 116-122
racional, 32
rama de una, 86
recorrido, 33, 75
regular, 64*n*.
trigonométrica (*Véase* Trigonométricas, funciones)
uniformemente continua, 48
valor de una, 30
Funciones identidades, 366
Fundamental del álgebra, teorema, 147-148
Fuente, 334, 335

Gamma, función, 220
Gauss, teorema del valor medio, 144
Geométrica, serie, 162
Goursat, E., 123-124
Gradiente, 65, 284, 287
Green, funciones de, 361, 364
Green, teorema de, 123, 308

Hidrodinámica, 307
Hiperbólicas, funciones, 82-83
ceros, 83
identidades, 82
inversas, 94-95
Holomorfa, función, 64*n*.

Imagen de un punto, 32
inversa, 32
Imaginario, eje, 7
Impar, función, 105
uno a uno aplicación, 33-36, 237, 243, 253, 254, 258-259, 265-266
Impropias, integrales reales, 207-215, 220-222
Impulso, función 352-353
Independencia del camino, 111, 116
Infinito punto del, 44-46
Integral(es)
Bromwich, 228
de contorno, 106-109
definidas, 98-101, 105-106, 218-219
de línea, 107, 279
elípticas, 325
Fourier, 225
Fresnel, 224
reales impropios, 207-215, 220-222
valor principal de Cauchy, 208
Integral, transformación, 346
Interior, punto, 27
Intersección de dominios, 366
Inversa(o)
función, 274-275
imagen de un punto, 32
local, 274-275
punto, 237, 344
transformada de Laplace, 227-230
Inversión, 237
Isogonal, aplicación, 272
Isotermos, 291

Jordan, curva de, 101
Jordan, desigualdad de, 213
Jordan, teorema de la curva de, 104
Joukowski, ala de, 318

Lagrange, identidad trigonométrica de, 26
Laplace, ecuación de, 66, 70, 290, 309
Laplace, transformación de, 228
inversa, 227-230
Laurent, series de, 164-168
Laurent, teorema de, 164-165
Legendre, polinomios de, 105*n*., 143*n*.
Límite(s)
de funciones, 38-41
en el punto del infinito, 44-46
de sucesiones, 151-152
teoremas sobre, 41-44
Línea integrales de, 106-107, 279
Lineal, combinación, 69
Lineal, transformación, 236
Lineal, transformación racional, 242-248
Lineales, funciones, 235-237
Líneas de flujo, 302
Liouville, teorema de, 147-148
Local, inversa, 274-275
Logarítmicas, función, 84-87
aplicación mediante, 251-252, 257
rama principal, 86
superficie de Riemann de la, 379-381
valor principal, 84
Logarítmico, residuo, 230-231

Maclaurin, serie de, 159, 184
Máximo, principio de módulo, 145-146
Máximos y mínimos, 48, 144-147, 149-150, 301
Módulo, 8
Morera, E., 141
Morera, teorema de, 141-142
Muchos a uno, aplicación, 74.
Múltiplemente conexo, dominio, 129-132
Multiplicación de series de potencias, 183-184
Multivaluada, función, 32, 379

Neumann, problema de, 280
para la región exterior a un círculo, 359-360
para un disco, 358-360
para un semiplano, 360-361
para una región semicircular, 363
Nivel, curvas de, 71
No acotado, conjunto, 28

Par, función, 105
Picard, teorema de, 197, 374
Poisson, ecuación de, 287
Poisson, fórmulas integrales de, 344-361
para un disco, 346
para un semiplano, 354-356
Poisson, núcleo de, 346
Poisson, transformada integral, 346
Polar, forma
de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, 61
de los números complejos, 14-17
Polares, coordenadas, 14, 60-61, 260
Polinomios, 32, 54, 64
ceros de, 148
de Legendre, 105*n*., 143*n*.
Polo(s)
número de, 233, 375-376
orden, 196, 201, 202-203
residuo, 199-204
simple, 196-199, 203
Potencial
complejo, 310
electrostático (*Véase* Electrostático, potencial)
velocidad, 309, 310
Potencias de números complejos, 19-20, 91-93
Potencias, series de
convergencia, 173-177
derivación, 179-181
división, 184-186
integración, 177-179
multiplicación, 183-184
producto de Cauchy, 184
unicidad, 181-182
Presión de un fluido, 308
Principal, parte, de una función, 196-197
Principal, rama, de una función, 86, 92, 261
Principal, valor
de Cauchy, 208
de las potencias, 92
del argumento, 14
del logaritmo, 84
Principio
de deformación de caminos, 132
de reflexión, 369-371
del argumento, 374-377
del módulo máximo, 145-146
Punteado, entorno, 27
Punto de remanso, 336
Punto del infinito, 44
entornos de, 44
límites en el, 44-46
Puro, número imaginario, 1

Racional, función, 32
Radio-frecuencias (calor infrarrojo), calentamiento por, 217
Raíces de números complejos, 20-23, 88-89
Rama (o determinación) de una función, 86
principal, 86, 92, 261
Ramificación, punto de, 86, 382
Real, eje, 7
Real, valor de una, función, 31
Recorrido de una función, 33, 75
Rectangulares, coordenadas, 7, 56, 251
ecuaciones de Cauchy-Riemann en, 56
números complejos en, 7
Reflexión, 9, 33
Reflexión, principio de, 369-371
Regiones en el plano complejo, 27-28
Regular, función, 64*n*.
Residuos, 190-192
aplicaciones de los, 207-215, 218, 221-222, 230-232

OTRAS OBRAS DE INTERES PUBLICADAS POR McGRAW-HILL/INTERAMERICANA

ABELLANAS/GALINDO. *Métodos de cálculo* (Schaum)
AMILLO/ARRIAGA. *Análisis matemático con aplicaciones a la computación*
AYRES/MENDELSON. *Cálculo diferencial e integral* (3.ª ed.) (Schaum)
CANAVOS. *Probabilidad y estadística*
CONTE. *Análisis numérico* (2.ª ed.)
GRAFE. *Matemáticas para economistas* (2.ª ed.)
GRANERO. *Algebra y geometría analítica*
GRANERO. *Cálculo*
LARSON. *Cálculo y geometría analítica* (3.ª ed.)
LIPSCHUTZ. *Algebra lineal* (Schaum)
MARCELLAN y otros. *Ecuaciones diferenciales*
RUDIN. *Análisis real y complejo*
RUDIN. *Principios de análisis matemático* (3.ª ed.)
SPIEGEL. *Variable compleja* (Schaum)
SPIEGEL/ABELLANAS. *Fórmulas y tablas de matemática aplicada* (Schaum)

ISBN: 84-7615-730-4